Technische Hydrodynamik

Von

Fr. Prášil

Technische
Hydrodynamik

Von

Dr. Franz Prášil
Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

Mit 81 Textfiguren

Berlin
Verlag von Julius Springer
1913

Copyright 1913 by Julius Springer in Berlin.

Vorwort.

Der gewaltige Aufschwung der Hydrotechnik hat sich, soweit die Benützung theoretischer Hilfsmittel in Frage kommt, auf Grundlage der Ergebnisse der praktischen Hydraulik vollzogen und dies mit durchschlagendem Erfolg; die Nutzbarmachung der uns von der Natur in den Wasserläufen dargebotenen Energie erfolgt sowohl hinsichtlich Abgrenzung und Ordnung der benützten Gebiete als auch hinsichtlich des Energieumsatzes in den Wassermotoren mit einer kaum mehr wesentlich zu steigernden Vollkommenheit.

Die klassische Hydrodynamik hat trotz ihrer ebenfalls fortschreitenden Entwicklung noch wenig direkten Einfluß auf diese Errungenschaften genommen; es liegt dies wohl daran, daß die Methoden, mit denen die Lösung der einzelnen Probleme durchgeführt ist, für die technische Handhabung zu umständlich sind, und zwar insbesondere bei der für die praktischen Bedürfnisse notwendigen Berücksichtigung der Bewegungswiderstände der Reibung und Turbulenz.

Gerade hierin besteht der große Vorsprung, den die Hydraulik vor der Hydrodynamik besitzt: die Theorien und Berechnungsmethoden der ersteren ermöglichen in relativ einfacher Weise die Berücksichtigung dieser Widerstände; sie benötigt hierzu allerdings in großem Umfang die Führung durch den Versuch, der sie direkt mit dem realen Geschehen vertraut macht. Aber die Beschäftigung mit dem Versuche regt je länger je mehr dazu an, die Folge der beobachteten Erscheinungen nicht bloß zu konstatieren und statistisch zu ordnen, sondern dieselben auch zu analysieren und deren Zusammenhang so weit zu klären, daß die Schlußfolgerungen richtend für die Beurteilung der Zweckdienlichkeit der Formen und Dimensionen hydrotechnischer Objekte werden können; da nun die Hydrodynamik ihrem Wesen nach die detaillierte Beschreibung der Strömungsvorgänge ermöglicht, so erscheint das Bestreben nach Schaffung solcher Methoden berechtigt, die die gewünschten Beschreibungen unter Anwendung von Hilfsmitteln liefern, die dem Ingenieur geläufig sind und dann ihren Zweck erfüllen werden, wenn die Genauigkeit der erzielten Resultate innerhalb technisch zulässiger Grenzen bleibt.

Im vorliegenden Buch ist versucht, einerseits diejenigen Ergebnisse der klassischen Hydrodynamik zusammenzufassen, die für die Hydrotechnik wertvoll sind und andererseits auf Grundlage der analytischen Geometrie, der darstellenden Geometrie und der konformen Abbildung, graphische Methoden vorzulegen zur Darstellung von Strömungsvorgängen und zwar mit Berücksichtigung der Reibungswiderstände und der Turbulenz.

Die Beweisführung für die Richtigkeit der Methoden und die Zulässigkeit der Verallgemeinerung einzelner Versuchsergebnisse erfordert immerhin eine weitgehende Verwendung der Mathematik; die Ausbildung der graphischen Methoden zur Vollkommenheit einer möglichst mühelosen Verwendbarkeit läßt auch noch die Lösung einiger Probleme der darstellenden Geometrie wünschenswert erscheinen; im Prinzipe dürften jedoch die vorgeschlagenen Methoden einen solchen Grad von Durchsichtigkeit besitzen, daß eine weitere Ausbildung lohnend erscheint.

Die Verwendbarkeit der vorgeschlagenen Methoden zur Darstellung von Strömungsformen und zur Analyse der Erscheinungen ist an einer Reihe von Beispielen und durch Vergleiche mit Versuchsresultaten veranschaulicht und bei Auswahl derselben möglichst auf deren praktischen Wert geachtet.

In Abteilung II sind einige Probleme der Hydrostatik behandelt.

Von einer Wiedergabe der Ableitungen bereits bestehender und bekannter Gleichungen wurde in den meisten Fällen abgesehen; die Hinweise auf einschlägige Literatur sind im Text oder als Fußnoten eingesetzt.

Meinem ehemaligen Assistenten, Herrn dipl. Masch.-Ing. A. Schirger, sowie dem Studierenden an der Abteilung für Maschineningenieure der Eidg. techn. Hochschule in Zürich, Herrn Oskar Weber, sage ich für die Mithilfe bei der Anfertigung der Zeichnungen, Skizzen und der Reinschrift meinen besten Dank.

Zürich, im Februar 1913.

F. Prášil.

Inhaltsverzeichnis.

I. Grundlagen.

A. Physikalische Eigenschaften des Wassers. Seite

Raumgestalt, Diskontinuitätsflächen 1
Spezifisches Gewicht, Zusammendrückbarkeit, Dichte 3
Absorption von Gasen 4
Eisbildung 5
Dampfbildung 6
Reibung, Viskosität 6
Hypothese von Newton 7
Formel von Poiseuille 7
Formel von Lang 8
Turbulenz 9
Versuche von Osborne Reynolds 9
Kritische Geschwindigkeit 10
Empirische Gleichungen 11
Formeln von Biel 11

B. Die Grundgleichungen.

I. Fundamentalgleichungen von Euler für widerstandsfreie Bewegung 14
Bewegungsgleichungen 17
Kontinuitätsgleichung 18
Grundgleichungen der Hydrostatik 18
Grundgleichungen stationärer Bewegungen 18

II. Allgemeine Form der Grundgleichungen 20
a) Grundgleichungen bei innerer Reibung 21
b) Grundgleichungen bei innerer Reibung und Turbulenz 23

II. Hydrostatik.

A. Absolute Ruhe.

I. Zustandsbestimmung 26
II. Bestimmung der Drucke auf Oberflächenteile fester Körper . . . 28
a) Bestimmung der Kräfte π 30
b) Bestimmung der Kräfte P 32
c) Zusammenfassung der Drucke 36
III. Spezielle Fälle 37
a) Symmetrische Form der Fläche 37
b) Bodendruck, hydrostatisches Paradoxon 37
c) Druck auf einen eingetauchten Körper (Schwimmen) 38

B. Relative Ruhe.

I. Allgemeine Untersuchung 41
II. Relative Ruhe in offenen Gefäßen (mit freier Oberfläche) 45
Lotrechte Translation 45
Translation in Vertikalebenen 46
Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 47
III. Relative Ruhe in geschlossenen Gefäßen (ohne freie Oberfläche) . 48
Gleichförmige Drehung um eine ruhende horizontale Achse . . . 49
Gleichgewicht eines Schwimmkörpers in einem bewegten Gefäß . 51

Seite

III. Hydrodynamik.

1. Stationäre Strömungen in feststehenden Räumen.

A. Geometrie der stationären Strömungen.
Strömungsbild, Raumteilung, Formfunktionen 55
Hauptbestimmungsgleichung der Formfunktionen 57
Grundformeln der graphischen Netzkonstruktion 61
Graphische Konstruktion von Netzlinien 61
Die konformen Abbildungen als Hilfsmittel der Netzdarstellung 62
Haupteigenschaft konformer Netze 63
Theorie der Krümmung ebener orthogonaler Trajektorien . . . 64
Graphische Bestimmung der Krümmungsradien der Netzlinien 69
Koordinatentransformation 70
Allgemeine Transformationsformeln 70
Transformationsformeln zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten 71
Beispiele 72
Kongruente Netze in parallelen Ebenen 72
Netze mit konstantem Diagonalenwinkel 72
Konstruktion der Netzlinien von einer Bahnlinie aus 74
Netze mit veränderlichem Diagonalenwinkel 78
Netze in Meridianebenen 79
Hauptgleichungen zur Bestimmung der Formfunktionen für Netze in Meridianebenen 82
Graphische Netzkonstruktion 82
Bestimmung von Netzen in krummen Flächen, die gleichmäßig verteilt um einer gemeinschaftlichen Achse liegen 85
Netze auf Schraubenflächen 86
Formfunktion einer Strömung zwischen Schraubenflächen . . . 88
Grundgleichung der konformen Abbildung von Schraubenflächen 91
Polargleichung des ebenen und konformen Netzes der φ- und ψ-Linien auf einer Schraubenfläche 92
Graphische Darstellung der φ- und ψ-Linien auf einer χ-Fläche 93
Grundlagen zu einem graphisch-rechnerischen Verfahren zu einer Netzbestimmung allgemeiner Flächen 94
B. Kinematik stationärer Strömungen.
Geschwindigkeitsgleichung 97
Vollkommene Potentialströmung 99
Formelle Potentialströmung 99
Schichtströmung und Fadenströmung 100
Deformation von Flächen im Stromfeld 101
Deformation einer Kugelfläche im Hyperbelnetz 102
Deformation einer Kugelfläche im Parabelnetz 104
Deformation einer unendlich kleinen Kugelfläche im Hyperbelnetz bei Schichtströmung 109
Hinweis auf die linearen infinitesimalen Deformationen.
Die Hauptsätze der infinitesimalen Deformationen 110
Vergleich mit den Beispielen 114
Deformation einer Querschicht 118
C. Dynamik stationärer Strömungen.
Die hydrodynamische Grundgleichung 122
I. Die hydraulische Grundgleichung 123
II. Widerstandsfreie Strömung 125
a) Vollkommene Potentialströmung 125
b) Widerstandsfreie Wirbelströmungen 126
Allgemeine Bestimmung der Bedingungen für widerstandslose Strömungen 128

Seite

III. Strömungen mit Widerständen 131
Untersuchung der Zusammensetzung der Widerstandskomponenten 132
Grundgleichung zur Bestimmung der Widerstandskomponenten 133
Folgerungen aus den Grundgleichungen 134
Einteilung in widerstandsfreie und widerstandshaltige Strömungsformen 134

Bestimmung der Oberflächenkräfte.

Mittelwertsbedingung für die Pressung 136
Pressungs- und Spannungsverteilung; Oberflächenkräfte am rechtwinkligen kartesischen Raumelement 138
Arbeit der Oberflächenkräfte 138
Dissipation 139

2. Strömungen in geraden Rohren.

A. Kreisförmiges Profil.

Formfunktionen 140
a) Strömung mit Reibung 141
Poiseuille-Strömung (mit Reibung) 141
Niveauflächengleichung 144
b) Strömung mit Reibung und Turbulenz 145
Umformung der Bielschen Formel 146
Gleichung der Niveauflächen für turbulente Strömung 148
c) Bestimmung der Oberflächenkräfte 148
d) Bestimmung der Dissipation 151
Tabelle für stationäre Strömung im geraden kreiszylindrischen Rohr 153
e) Allgemeine Widerstandsformeln 154
Verallgemeinerung der Formel der Tangentialspannung $\mathfrak{p}_q$ . . . 154
Allgemeine Isotachengleichung für das gerade Rohr 155
f) Vergleiche mit den Formeln von Lorentz 155
g) Das doppelwandige Profil 158
h) Ergänzungen, Versuchsresultate 159

B. Elliptisches Profil.
Geschwindigkeitsformel von Lamb; Anpassung derselben an die Formel $v = G\sqrt{A}\mu$ 160
Hilfsmittel zur Bestimmung verschiedener ψ-Funktionen nach Lamb 165
Übertragung in die Darstellungsweise mit Formfunktionen 165
Graphisches Verfahren zur Bestimmung der Leitlinien von ψ-Flächen durch Funktionenaddition 167

C. Stollenprofile.
Beispiel der Bestimmung von Rohrprofilen und deren Isotachen durch graphische Funktionenaddition 168

D. Rechteckiges Profil.
Beispiel der anlytischen Bestimmung von Isotachen mittels Reihen bei gegebener Profilform 173
Versuchsresultate, Schlußfolgerungen 177

3. Meridionale Strömungen in Rotationshohlräumen.

A. Die Bestimmung der Formfunktionen 180
B. Strömungen mit Widerständen 183
Schichtströmung in widerstandsfreien Formen (Strömungen erster Art) 183
Allgemeine Bestimmung der Oberflächenkräfte im Koordinatennetz φ, ψ, χ, der Meridionalströmungen 185
Tabelle der Oberflächenkräfte 186
Bestimmung der Widerstandskomponenten 188

Seite
Die Bewegungsgleichung für das Netzelement 189
Gleichung für die Tangentialspannung p_χ bei Potentialform 193
Gleichung für die Tangentialspannung p_χ bei allgemeiner widerstandsfreier Form 194
Beispiel.
Bestimmung der Funktionen U und Φ 196
Bestimmung der Funktion λ 197
Bestimmung der Konstanten K und G 199
Pressungsabfall am Rand, Pressungsabfall an der Achse, Geschwindigkeitskonstante, Isotachengleichung, Gleichung der Durchflußmenge pro Zeiteinheit 200
Bestimmung des Ortes für $p = 0$ 203
Bestimmung der Orte für $p_\chi = 0$ 205
Allgemeine Formen (Strömungen zweiter Art) 205
Hauptergebnisse 206
Vergleich mit Versuchsergebnissen 208

4. Ebene zweidimensionale Schichtströmungen.

Bestimmung der Formfunktionen 210
Strömungen mit Widerständen 211
Geradlinige Parallelströmung zwischen ebenen Platten 211
Allgemeine Strömung zwischen ebenen Platten 212
Strömung zwischen zwei gekrümmten Schaufeln 213
Gleichungen für die Tangentialspannung p_χ 214
Gekrümmte Kanäle 215
Untersuchung des Bestandes von freien Oberflächen 218

5. Stationäre Strömung in bewegten Kanälen.

A. Geometrie der Strömmung.
Beschreibung der Strömungsformen 224
Bestimmung der absoluten Stromlinien 225
Translation des Kanals 227
Bestimmung durch Funktionenaddition 229
Rotierender Kanal 232
B. Kinematik der stationären Relativströmungen 236
C. Dynamik stationärer Relativbewegungen 236
Geradlinig gleichförmige Translation des Hohlraumes 237
Gleichförmige Rotation des Hohlraumes um eine feststehende Achse . 245
Fundamentalgleichung der Relativbewegung 245
Hydrodynamische Grundgleichung der Relativbewegung 246
Hydraulische Bewegungsgleichungen 247
a) Hydraulische Fadenströmung 247
b) Hydraulische Flächenströmung 248
c) Momentensatz von Euler 248
Kraftumsatz im rotierenden Kanal 249
Momentengleichung von Euler 250
Schlußfolgerung 250
Zeitlich veränderliche Strömung 250

IV. Anhang.

Auszug aus dem Artikel des Verfassers in der Schweiz. B.-Z., Bd. LII, Nr. 7 und 8: „Zur Geometrie der konformen Abbildung von Schaufelrissen“ 253

I. Grundlagen.

Für die Theorien der Hydrotechnik kommt hauptsächlich der flüssige Aggregatzustand des Wassers in Betracht, die praktische Hydrotechnik hat sich mit dem festen Aggregatzustand insofern abzugeben, als durch die Eisbildung (Treibeis, Grundeis) in natürlichen Gewässern Störungen in den Zu- und Abflußkanälen verursacht werden, für deren Abschwächung oder Beseitigung durch geeignete bauliche, eventuell auch mechanische Einrichtungen Sorge getragen werden muß; der gasförmige Aggregatzustand kommt in solchen Fällen in Betracht, wo flüssiges Wasser innerhalb des Strömungsgebiets in Räume gelangt, in denen, sei es durch verminderten Druck, sei es vermöge des großen Wärmeinhaltes der Flüssigkeit, Dampfbildung verursacht und möglich ist (z. B. in Warmwasserpumpen).

A. Physikalische Eigenschaften des Wassers.

Experimentelle Ergebnisse.

Raumgestalt, Diskontinuitätsflächen.

Wasser hat im flüssigen Zustande keine selbständige Gestalt; seine Raumgestalt ist durch die Form der Hohlräume der festen Körper bestimmt, in denen es sich befindet; sind die Hohlräume geschlossen und vollständig mit Wasser (oder sonst einer homogenen Flüssigkeit) angefüllt, so ist deren Raumgestalt kongruent derjenigen der Hohlräume; sind dieselben nicht vollständig angefüllt, so wird die Raumgestalt des Wassers teils durch die Wände der Hohlräume, teils durch freie Oberflächen bestimmt, an denen das Wasser mit dem in den Hohlräumen befindlichen gasförmigen Medium in Berührung steht; die Gestalt dieser Flächen ist von den Bewegungszuständen abhängig; sind in den Hohlräumen Flüssigkeiten verschiedener Art in ungemischtem Zustand vorhanden, so grenzen die

Flüssigkeiten ebenfalls an Flächen aneinander, deren Form von den Bewegungszuständen und vom Rauminhalt der Flüssigkeiten abhängig ist; man nennt dieselben Diskontinuitätsflächen, die freien Oberflächen sind dementsprechend Diskontinuitätsflächen; solche können auch innerhalb einer Flüssigkeit entstehen und zwar bei Bewegungserscheinungen mit verschiedenen Bewegungsformen einzelner Teile der Flüssigkeit (Wirbel, Nebenströmungen).

Beispiel: die freie Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit in einem ruhenden Gefäß ist eine horizontale Ebene; die freie Oberfläche einer Flüssigkeit in einem Rotations-Hohlraum, der sich um eine vertikal stehende geometrische Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht, ist bei relativer Ruhe der Flüssigkeit gegenüber dem Gefäß ein Rotationsparaboloid; ist das Gefäß in Ruhe, so ist in demselben eine kreisende Bewegung der Flüssigkeit möglich, die vom Rande ab bis zu einer bestimmten Entfernung von der Achse derart erfolgt, daß dort die freie Oberfläche eine Art hyperbolischer Rotationsflächen, hingegen in der Nähe der Achse eine parabolische Rotationsfläche wird (Rankines kombinierter Wirbel). Siehe „Lamb", Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 33 und Fig. 1.

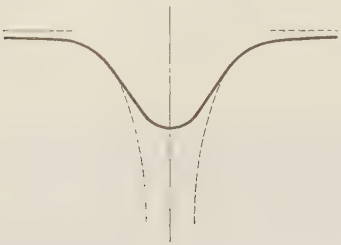

Fig. 1.

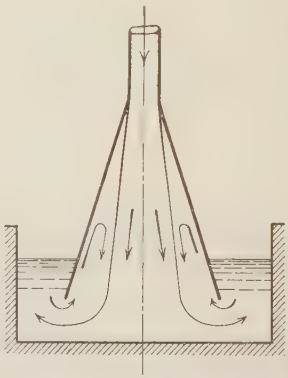

Fig. 2.

Läßt man durch die kleine Öffnung eines stark trichterförmig geformten Gefäßes mit vertikal stehender Achse Wasser einströmen und findet die Ausströmung unter Wasser in ein Sammelgefäß statt, so zeigen Schwimmkörperchen, die der Flüssigkeit beigemengt sind, daß im Trichter zwei Strömungsformen (Fig. 2) auftreten: eine Hauptströmung des durch die kleine Öffnung einströmenden Wassers, die sich innerhalb des Trichters in der Nähe der geometrischen Achse vollzieht, eine Nebenströmung, die die Hauptströmung bis zur Trichterwand umgibt und dadurch entsteht, daß ein Teil der bereits aus dem Trichter ins Sammelgefäß längs und in der Nähe der Trichterwand wieder gegen die Einströmungsöffnung geführt und dann längs und in der Nähe der Grenzfläche der Hauptströmung wieder ins Sammelgefäß zurückgeführt wird; diese Grenzfläche ist eine Diskontinuitätsfläche.

Einflußnehmend auf die Gestalt von Diskontinuitätsflächen sind auch die Molekularkräfte, es ist dies jedoch in so geringem Maße der Fall, namentlich bei Bewegungsvorgängen, daß von einer Berücksichtigung des Einflusses abgesehen wird.

Spezifisches Gewicht, Zusammendrückbarkeit, Dichte, spezifisches Volumen.

Das spezifische Gewicht des Wassers ist veränderlich mit der Temperatur desselben und dem Druck, die Veränderlichkeit ist jedoch innerhalb der Grenzen, die den Anwendungsgebieten der Hydrotechnik entsprechen, so gering, daß im allgemeinen von deren Einfluß abstrahiert wird; es wird demgemäß zumeist das Gewicht des Wassers pro Kubikmeter = 1000 Kilogramm angenommen und Unzusammendrückbarkeit desselben vorausgesetzt.

Bei manchen Untersuchungen, z. B. denjenigen der ungleichförmigen Bewegung in langen Leitungen, führt jedoch diese Abstraktion zu unvollständigen Resultaten, es ist hierbei der elastische Zustand des Wassers und des Wandmaterials zu berücksichtigen[1]).

Die Zusammendrückbarkeit des Wassers in Millionenteilen des ursprünglichen Volumens pro 1 Atmosphäre (= 1,033 kg/qcm) beträgt für luftfreies Wasser

nach Colladon-Sturm	49,65
„ Oersted	46,65
„ Grassi bei 0° C .	50,00
„ „ „ 53° C	44,00.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Wasser beträgt nach Versuchen von Colladon-Sturm 1435 m/sek und läßt sich berechnen aus der Formel a m/sek $\sqrt{\frac{g}{s}}$, worin $g = 9{,}81$ qm/sek die Beschleunigung der Schwerkraft, s die Längenänderung einer Schicht von der Länge l und dem Querschnitt 1, unter einem dem Gewichte ihrer eigenen Masse gleichen Totaldruck bedeutet; hieraus ergibt sich $s = \frac{9{,}81}{1435^2} = 4{,}77 \cdot 10^{-6}$ als Längenänderung per 1 m Wassersäule und hiermit per 1 alte Atm. = 10,33 m die Zusammendrückbarkeit des Wassers mit 49,17 in guter Übereinstimmung mit obigen Werten.

Das luftfreie Wasser besitzt seine größte Dichte bei 4° C (nach Versuchen an der Physik.-techn. Reichsanstalt bei 3,98°).

Die aus Versuchen verschiedener Experimentatoren von Roselli abgeleitete Formel für das spezifische Volumen bei Atmosphärendruck, d. i.:

$$V_t = 1 + A(t-4)^2 - B(t-4)^{2,6} + C(t-4)^3$$
$$A = 0{,}000\,008\,379\,91$$
$$B = 0{,}000\,000\,378\,702$$
$$C = 0{,}000\,000\,022\,432\,9$$

[1]) Siehe Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Rohrleitungen von Lorenzo Allievi; ins Deutsche übersetzt von Robert Dubs und V. Bataillard. Verlag von Julius Springer 1909.

ergibt innerhalb der Temperaturdifferenzen -5^0 und $+100^0$ Werte, die in der Nähe des Dichtemaximums bis auf die sechste Dezimale, bei höheren Temperaturen bis auf $\pm 0{,}00003$ mit den Versuchsresultaten übereinstimmt.

Nach derselben ergibt sich folgende Tabelle[1]):

Temperatur	Dichte bei 4° C = 1 gesetzt	Volumen
-10^0	0,998145	1,001858
-5^0	9298	0702
-0^0	9871	0129
$+4^0$	1,000000	1,000000
$+10^0$	0,999747	0253
$+20^0$	8259	1744
$+30^0$	5765	4253
$+40^0$	2350	7700

Absorption von Gasen.

Wasser besitzt die Eigenschaft, aus der umgebenden Luft Gase zu absorbieren. Für Sauerstoff und Stickstoff ist die Absorption eine eigentliche oder physikalische, d. h. es entstehen hierbei keine chemischen Bindungen, während andere Gase, wie z. B. Ammoniakgas, chemisch gebunden werden; Kohlensäure wird teils chemisch, teils rein physikalisch absorbiert.

Von besonderer Bedeutung für die Hydrotechnik ist der genannte Fall: Absorption von Sauerstoff und Stickstoff aus der atmosphärischen Luft; wird nach Bunsen mit α der Absorptionskoeffizient, d. i. das auf 0^0 reduzierte Gasvolumen, das von Volumeneinheit Flüssigkeit bei einem Druck von 760 mm Quecksilbersäule absorbiert wird, bezeichnet, so gilt

$$\text{für Stickstoff } \alpha_N = 0{,}020346 - 0{,}00053887\,t + 0{,}000011156\,t^2$$
$$\text{für Sauerstoff } \alpha_O = 0{,}04115 - 0{,}00109\,t + 0{,}00002256\,t^2$$

und ferner das Gesetz der Teildrücke: „Wenn zwei oder mehrere Gase miteinander gemischt sind, so erfolgt die Absorption proportional dem Drucke, denen jeder der Gemengteile ausüben würde, wenn er sich allein in dem vom Gasgemenge erfüllten Raum befände.“ Atmosphärische Luft besteht aus 0,2096 Volumteilen Sauerstoff und 0,7904 Volumteilen Stickstoff, hiermit ist der Partialdruck

$$\text{für Sauerstoff } p_0 = 0{,}2096\,p_L$$
$$\text{„ Stickstoff } p_n = 0{,}7904\,p_L$$

[1]) Auszug aus der Tabelle auf S. 92 von Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik, Bd. II_2.

wenn p_L den Luftdruck bezeichnet; es ergibt sich mit den Absorptionskoeffizienten α_0 und α_N, die für den Druck von 760 mm Quecksilbersäule gelten, der Absorptionskoeffizient für Luft bei demselben Druck

$$\alpha_L = 0{,}2096\,\alpha_0 + 0{,}7904\,\alpha_N$$

und demnach für $t = 0^0$ C mit: $\alpha_0 = 0{,}041\,15$; $\alpha_N = 0{,}020\,346$

$$\alpha_L = 0{,}008\,635 + 0{,}016\,51 = 0{,}024\,726,$$

d. h. die im Wasser von 0^0 absorbierte Luft enthält 34% Sauerstoff und 66% Stickstoff, während die atmosphärische Luft 21% Sauerstoff und 79% Stickstoff enthält.

Wenn Wasser, das absorbierte Luft enthält, im Laufe eines Strömungsvorganges in den Zustand kleinerer als atmosphärischer Pressung gelangt, so entweicht die absorbierte Luft; es entsteht ein Gemisch von Wasser und Luft, wodurch einerseits die Strömungsvorgänge beeinflußt werden, andererseits kann der größere Sauerstoffgehalt des wieder freigelassenen Gemisches zerstörend auf die Wandungen der Gefäßwände einwirken, wie sich dies an den Lauf- und Leiträdern von Turbinen und Zentrifugalpumpen in störendem Maße bemerkbar macht.

Das Freiwerden absorbierter Luft ist auch eine der Ursachen, die die praktische Saughöhe an Wasserhebemaschinen beschränkt.

In erhöhtem Maße gilt das Obige für kohlensäurehaltiges Wasser, der Absorptionskoeffizient für dieses Gas ist nämlich nach Bunsen

$$\alpha_K = 1{,}7967 - 0{,}077\,61\,t + 0{,}001\,6424\,t^2,$$

also relativ sehr groß. Das absorbierte Gasgemenge kann durch Erwärmen reduziert resp. ganz entfernt werden, da das Absorptionsvermögen mit höherer Temperatur abnimmt.

Eisbildung.

Chemisch reines luftfreies Wasser erstarrt bei Atmosphärendruck unter gewöhnlichen Umständen bei 0^0, unreines Wasser, z. B. Flußwasser, bei der etwas niedrigen Temperatur von $-0{,}001\,7^0$, Seewasser bei $-2{,}5^0$ zu Eis; unter besonderen Umständen kann die Erstarrung bis zu einer Unterkühlung auf -13^0 verzögert werden, worauf sie dann plötzlich unter Erhöhung auf die normale Erstarrungstemperatur eintritt. Der Schmelzpunkt des Eises wird durch hohen Druck erniedrigt, und zwar pro 1 Atmosphäre Druckzunahme um $0{,}0075^0$, die bei der Eisbildung frei werdende Wärmemenge beträgt 79,25 Kalorien; die spezifische Wärme des festen Eises ist $= 0{,}5$, des geschmolzenen Eises $= 1{,}0$ Kalorie.

In ruhendem Wasser findet die Eisbildung von der Oberfläche ausgehend nach unten statt, es bildet sich eine Eisdecke, unterhalb derselben ist die Temperatur des Wassers höher als 0^0 bis zu 4^0; am fließenden Wasser entwickelt sich Eis auch an der Sohle als so-

genanntes Grundeis; dasselbe hat seinen Ursprung auch in der Oberflächen-Eisbildung sowie in gefallenem Schnee. Die Temperatur ist in verschiedenen Tiefen nahezu dieselbe.

Über die Bildung des Grundeises und dessen Eigenschaften liegt eine Monographie vor: Das Grundeis und daherige Störungen in Wasserläufen und Wasserwerken von Dr. phil. C. Lüscher, Ingenieur in Aarau, Druck und Verlag von Emil Wirz-Aarau.

Dampfbildung.

Gelangt strömendes Wasser innerhalb seiner Bahn durch Hohlräume, die teilweise mit Luft angefüllt sind, — so ist Gelegenheit zur Bildung von Dampf vorhanden, der mit der Luft in Mischung tritt; die Erscheinung wird aber nur dann praktisch fühlbar, wenn entweder die Temperatur des Wassers eine anhaltend hohe (z. B. Warmwasserpumpe) ist oder wenn der Druck im Hohlraum klein ist (Saugwindkessel); in diesen Fällen kann sich die Verdampfungserscheinung mit der Erscheinung der Abgabe absorbierter Gase vereinigen.

Ist der Druck des Gemisches $= p$, so sind die Raumteile von Luft und Wasserdampf

$$r_L = \frac{p - \varphi p'}{p}; \qquad r_D = \frac{\varphi p'}{p}, \quad \text{worin} \quad \varphi = \frac{p_D}{p'}$$

die relative Feuchtigkeit, p_D den wirklichen Teildruck des Wasserdampfes, p′ den der Temperatur des Gemisches entsprechenden Sättigungsdruck desselben bedeuten; für gesättigte Luft ist $\varphi = 1$.

Bezügliche Tabellen gibt die Hütte, 20. Aufl., Bd. I. S. 323 u. 334.

Reibung, Viskosität.

Die zu oberst angeführte Eigenschaft, die Unselbständigkeit der Raumgestalt, hängt zusammen mit der Eigenschaft der leichten Beweglichkeit des Wassers; dieselbe ist jedoch keine vollkommene, da der Verschiebung der Flüssigkeitsteile gegen feste, wenn auch an sich glatte Wände und untereinander molekulare Kräfte entgegenwirken; die Wirkung dieser Kräfte wird als Reibung, und zwar diejenige zwischen Wand und Flüssigkeit als äußere Reibung, diejenige zwischen Flüssigkeitsteilchen untereinander als innere Reibung oder Viskosität bezeichnet; es wird im allgemeinen angenommen, daß die äußere Reibung so groß ist, daß die Erscheinung der Benetzung, d. i. das Haftenbleiben von Flüssigkeit an den Wänden eintritt selbst bei größter Bewegungsgeschwindigkeit der übrigen Flüssigkeitsteile. Durch die innere Reibung tritt eine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Schichten strömender Flüssigkeit auf, die einflußnehmend auf die Bewegung der einzelnen Teile wird.

Die der inneren Reibung entsprechende Kraft ist, nach der bezüglichen Hypothese von Newton, durch die Gleichung

$$K = \eta f \frac{v' - v}{\delta}$$

in dem Sinne bestimmt, daß, wenn eine Flüssigkeitsschicht von der unendlich kleinen Dicke δ in Flächen von der Größe f mit benachbarten Schichten in Berührung steht, die die parallel gerichteten Geschwindigkeiten v' resp. v besitzen, K die Kraft in der Richtung von v' ist, durch die die sich mit der Geschwindigkeit v bewegende Schicht beschleunigt wird; auf die andere Schicht wirkt K in entgegengesetzter Richtung verzögernd; vorausgesetzt ist hierbei, daß $v' > v$; $v' - v$ ist hiermit die Relativgeschwindigkeit der beiden Schichten; liegt die Dicke δ in der Richtung der Komponente z eines kartesischen Koordinatensystems, so kann $v' = v + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z$ gesetzt werden; es folgt aus obiger Gleichung

$$K = \eta f \frac{\partial v}{\partial z}$$

und hiermit für $\lim \delta = 0$ der Ausdruck für die Reibungskraft zwischen zwei Flüssigkeitsschichten, die sich in der Fläche f berühren, verzögernd auf diejenige Schicht wirkend, die sich gegen die andere relativ rascher bewegt.

η ist der Koeffizient der inneren Reibung; derselbe hat die Dimension: Kraft $\times$ Zeit dividiert (Länge)^2, sein Wert ist experimentell zu bestimmen. Poisseuille hat durch Ausflußversuche an Kapillarröhren und Vergleich der Resultate mit theoretischen auf die Newtonsche Hypothese gegründeten Untersuchungen die Gültigkeit derselben für Strömungen durch solche Röhren erwiesen, hierbei die heute gebräuchlichste Methode für die Bestimmung der Werte von η begründet und für Wasser bei verschiedenen Temperaturen t in Celsiusgraden im mm/mg/sek-System (auch gültig in kg/m/sek-System)

$$\eta = \frac{0{,}0001817}{(1 + 0{,}0336\, t + 0{,}000221\, t^2} \quad \ldots \ldots \quad 1$$

bestimmt (Comptes rendus 11412 [1840—41], Recherches expérimentales sur les liquides dans les tubes de très petits diamètres).

Die Druckdifferenz Δp, die zur Überwindung der Reibung zwischen zwei in der Entfernung L befindlichen Querschnitten eines horizontalen kreiszylindrischen Rohres vom Durchmesser D bei geradliniger, gleichförmiger Bewegung des Wassers mit der mittleren Ge-

schwindigkeit v_m nötig ist, läßt sich aus folgender vorgreiflich zitierter Formel berechnen

$$\Delta p = \frac{32\,\eta\,L\,v_m}{D^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II}$$

Hiermit ist in einem Rohr von bestimmten Dimensionen und bei konstanter Temperatur wobei η konstant bleibt Δp proportional der Geschwindigkeit v_m.

Hingegen folgt aus Versuchen an Röhren mit größerem Durchmesser, daß Δp im allgemeinen nicht proportional v_m, sondern aus einer Formel von der Form:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v_m^2}{2g} \gamma \quad \ldots \ldots \quad \text{III}$$

bestimmbar ist, in der γ das Gewicht des Wassers pro Volumeneinheit, g die Beschleunigung der Erdschwere und λ einen empirischen [illegible] von Lang, unter Berücksichtigung aller bis 1907 veröffentlichten und etwa 300 eigene Versuche zwischen den Geschwindigkeitsgrenzen $v_m = 0{,}004$ m/sek bis $v_m = 53$ m/sek die Formel gibt:

$$\lambda = \left(a - \frac{b}{\sqrt{v_m \cdot D}}\right) C \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{IV}$$

a und C sind die Zahlenwerte, die vom Zustand des Rohres abhängig sind. Man kann setzen: $a = 0{,}012$; $C = 1$ für neue Rohre mit ganz glatter Innenfläche ohne [illegible] Querschnitte an den Verbindungsstellen.

$a = 0{,}013$; $C = 1$ für neue oder sehr gut gereinigte Rohre mit geringen Unebenheiten in der Innenfläche und an den Verbindungsstellen.

$a = 0{,}020$ und $C = \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^5$ für Rohre mit wesentlichen Unebenheiten, wenn δ den normalen, δ_1 den von den Unebenheiten verursachten freibleibenden Durchmesser bedeuten. Der Wert des Zahlers 1 ist von der Temperatur abhängig und beträgt 0,001 8 bei etwa 24° C, wächst bis zu 0,0022 bei 3° C und vermindert sich bis zu 0,0004 bei 100° C.

Berechnet man für z. B. $L = 100$ m, $D = 0{,}5$ m, $v_m = 2{,}0$ m/sek, $t = 24°$ die Werte von Δp, so ergibt sich aus der Formel I

$$\eta = 0{,}000\,103$$

und hiermit aus Formel II:

$$\Delta p = 2{,}636\,8 \text{ kg/qm}$$

mit $a = 0{,}020$, $C = 1$; $b = 0{,}0018$ aus Formel IV:

$$\lambda = 0{,}020 + 0{,}0018 = 0{,}0218$$

und mit $\gamma = 1000$ kg/cbm; $g = 9{,}81$ m/sek² aus Formel III:

$$\Delta p = 816 + 73 = 889 \text{ kg/qm}.$$

Hieraus erkennt man, daß die Bewegungswiderstände nur in relativ geringem Maße von der Reibung selbst abhängen, daß vielmehr der Zustand des Rohres, dessen Einfluß in der Formel IV durch den Zahlenwert a und den Koeffizienten C zum Ausdruck kommt, in überwiegendem Maße bestimmend für dieselben ist.

Die Erklärung hierfür ist nun durch die grundlegenden Versuche von Osborne Reynolds gegeben, die in Papers on Mechanical and Physical Subjects. Cambridge, at the University Press, 1901, Vol. II, pag. 51 u. f. veröffentlicht sind; aus denselben geht hervor, daß neben der fließenden Bewegung noch unregelmäßige wirbelnde Bewegungen vorhanden sind, die die für das Fließen nötige Druckdifferenz erhöhen; es ist dies die Erscheinung der

Turbulenz.

Durch Beobachtung der Strömungserscheinungen in geraden Glasrohren von kreisförmigem Querschnitt, in denen die Form der Bewegung durch entsprechende Zuführung gefärbter Flüssigkeitsbänder

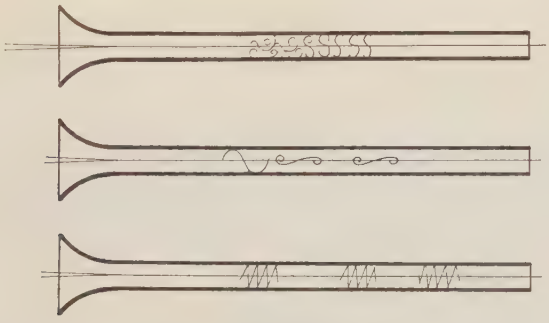

Fig. 3.

(Fig. 3) ersichtlich gemacht wurde, ergaben sich folgende qualitative Resultate:

1. Bei genügend kleinen Geschwindigkeiten bildete der die Strömung zeigende Farbstreifen eine schöne stabile gerade Linie längs des Rohres.
2. Bei vergrößerten Geschwindigkeiten tritt immer in beträchtlicher Entfernung von der Einmündung, dort aber plötzlich

eine Mischung des Farbbandes mit dem umgebenden Wasser ein, die dann im weiteren Teil des Rohres erhalten bleibt; bei Momentbeleuchtung erweist sich die gefärbte Masse in mehr oder weniger regelmäßige Wirbel aufgelöst, die Bewegung ist nur im ersten Teil des Rohres stabil.

3. Die Geschwindigkeit, bei der dieser plötzliche Übergang vom stabilen in den wirbelnden Zustand stattfindet, ist in bestimmter Weise abhängig vom Durchmesser und der Temperatur der Flüssigkeit; sie hat den Charakter einer kritischen Geschwindigkeit.
4. Wird in die Röhre eine sich an die Rohrwand anschmiegende Drahtspirale eingelegt, so treten an derselben Störungen der Bewegung bereits bei kleineren Geschwindigkeiten als sub 3 auf.
5. Ist der Zustand im Zuflußgefäß ein sehr unruhiger, so löst sich bei ganz kleinen Durchflußgeschwindigkeiten das Farbband schon bald in unregelmäßige Wirbel auf; bei etwas vergrößerter Geschwindigkeit werden die Wirbel regelmäßig und verschwinden dieselben bei weiterer Vergrößerung der Geschwindigkeit so, daß die Bewegung eine stabile, das Farbband geradlinig wird, welcher Zustand bestehen bleibt, bis die dem Rohrdurchmesser und der Temperatur entsprechende kritische Geschwindigkeit erreicht wird, bei der die normale Erscheinung eintritt.
6. In relativ engen Röhren treten abwechselnd in periodischer Längenausdehnung unstabile und stabile Bewegungen auf.
7. Die Unstabilität beginnt unter allen Umständen in einer Entfernung von der Eintrittsmündung des Rohres, $>$ 30fache des Rohrdurchmessers.

Das wesentlichste quantitative Resultat besteht in der Formel:

$$\frac{v_k \cdot D \cdot \varrho}{\eta} = C \text{ mit } C = 1900 \text{ bis } 2000,$$

wobei v_k die kritische Geschwindigkeit, D den Rohrdurchmesser, ϱ die spezifische Masse, η den Koeffizienten der inneren Reibung und C eine Konstante bedeuten, deren Werte Reynolds aus seinen eigenen Versuchen und denjenigen von Poisseuille und von Darci abgeleitet hat; C ist ein reiner Zahlenwert. Mit den Dimensionen des obigen Beispiels $\gamma = 998{,}26$ kg/cbm entsprechend $t = 20^0$ und $g = 9.81$ m/sek, also $\varrho = 101{,}7$ wird

$$v_k = 2000 \cdot \frac{0{,}000103}{101{,}7 \times 0{,}5} = 0{,}004 \text{ m/sek}.$$

Man erkennt, daß die kritische Geschwindigkeit sehr kleine Werte annimmt und daher in Rohrleitungen im allgemeinen unstabile oder nach gebräuchlicher Bezeichnung turbulente Bewegungen vorhanden sind.

Aus den aufgezählten Versuchserscheinungen, die durch andere Experimentatoren bestätigt und erweitert wurden, ferner aus dem Umstande, daß der Widerstand durch innere Reibung allein ein geringer und daß der Wert der kritischen Geschwindigkeit mit abnehmender Zähigkeit der Flüssigkeit, d. i. abnehmendem η, sinkt, ist zu schließen, daß die Quantität des Widerstandes der turbulenten Bewegung durch Ungleichmäßigkeiten der Strömung bestimmt ist, die einerseits durch Störungen der Bewegungen am Zu- und Abfluß, sowie durch die Rauhigkeit der Rohrwandung verursacht, andererseits eben durch die Eigenschaft der leichten Beweglichkeit gefördert sind. Die innere Reibung spielt hierbei eine ausschlaggebende Rolle in der Nähe der Wände, indem dieselbe dort Wirbel verursacht, die in die übrige Flüssigkeit hineinwandern. Siehe Prandtl, Verhandl. d. internat. mathem. Kongresses 1904.

Die Turbulenz ist natürlich nicht an Röhren mit Kreisquerschnitt gebunden, sondern ist im allgemeinen bei Strömungsvorgängen zu finden; ihr Einfluß auf das Strömungsvermögen ist für die Zwecke der praktischen Rechnung durch eine Reihe von Formeln zur Bestimmung der Widerstandshöhe, d. i. die in Wassersäule ausgedrückte Druckdifferenz Δp also $h_w = \frac{\Delta p}{\gamma}$ zum Ausdruck gebracht[1]; diese Formeln beziehen sich auf Strömungen in Röhren, Flüssen und Kanälen und wird auf deren systematische Zusammenstellung in „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften" IV. 2. Heft 3. Hydraulik von Forchheimer verwiesen. Im Heft 44 der Forschungsarbeiten des V. d. Ing. und im Bd. 52 der Z. d. V. d. Ing. hat Biel die Ergebnisse derselben in folgende zwei Formeln nebst Tabelle zusammengefaßt:

$$h_w = \frac{k L v_m^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{A}$$

worin R den hydraulischen (Profils-)Radius, d. h. $R = \frac{\text{Querschnitt in qm}}{\text{benetzter Umfang m}}$ und L die Rohrlänge in Kilometern bezeichnet;

$$k = a + \frac{f}{\sqrt{R}} + \frac{b}{v \cdot \sqrt{R}} \cdot \frac{\eta}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \text{B}$$

[1]) Hierzu gehört auch die oben erwähnte Formel von Lang.

a ist ein Grundfaktor, f der Rauhigkeitsfaktor, b der Zähigkeitsfaktor und (η) der Reibungskoeffizient (nach Biel absoluter Zähigkeitskoeffizient) in C. G. S.-Einheiten, also $(\eta) = 98{,}1\ \eta$, wenn η, wie oben, in dem praktischen Maßsystem entsprechenden Ziffernwerten gegeben ist.

Biel unterscheidet 6 Rauhigkeitsgrade, charakterisiert dieselben wie folgt:

Rauhigkeitsgrad	I	blankgezogene Rohre,
„	II	Blechrohre,
„	III	gußeiserne Rohre und ebene Wandungen aus Zement,
„	IV	rauhe Bretter,
„	V	Backsteinwandungen,
„	VI	rauhe Wandungen

stellt folgende Tabelle auf:

Rauhigkeitsgrad	I	II	III	IV	V	VI
Grundfaktor a	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	
Rauhigkeitsfaktor für Rohre, f	0,0064	0,018	0,036	0,054	0,072	
für Bruchsteinmauerwerk:						0,18
„ rauhes „						0,27
„ Kanäle in Erde, regelmäßige Bäche, Flüsse, Ströme						0,50
„ Gerölle, Wasserpflanzen und Hindernisse . . .						0,75
dto bis						1,06
Zähigkeitskoeffiz. b . . .	0,95	0,71	0,46	0,27	0,27	
$b \cdot \frac{(\eta)}{\gamma}$ für $t = 12^0$ } Wasser:	0,0118	0,0088	0,0057	0,0032	0,0032	
„ $t = 100^0$ }	0,00294	0,0022	0,00142	0,00083	0,00024	

und zeigt an Diagrammen die gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen früherer Formeln.

Bei der Verschiedenheit der Umstände, die die Turbulenz verursachen, ist es naturgemäß unmöglich, eindeutige Hypothesen für deren Quantität aufzustellen; es ist jedoch von verschiedenen Physikern gezeigt worden, daß der allgemeine Aufbau obiger empirischer Formeln auch auf theoretischem Wege begründet werden kann, und sind diesbezüglich namentlich die Untersuchungen von Osborne-Reynolds an oben angegebener Stelle und diejenigen von Boussinesq in seiner Theorie de l'écoulement tourbillonant et tumulteux ... anzuführen.

Beide Autoren und ferner H. A. Lorentz-Leiden haben Theorien der turbulenten Bewegung auf Grundlage der Hydrodynamik auf-

gestellt, um die dynamischen Verhältnisse der Turbulenz zu klären und den Einfluß der Zähigkeit auf die Störung oder Wiederherstellung der Stabilität zu bestimmen. (Siehe Abhandlungen über theoretische Physik von H. A. Lorentz, Teubner-Leipzig, S. 43 u. f.)

Auf die Theorien von Lorentz wird in der Folge Bezug genommen werden.

B. Die Grundgleichungen.

Der Bewegungszustand einer Flüssigkeit ist dann durch Gleichungen vollständig beschrieben, wenn mittels derselben für jeden Punkt des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes und für jede Zeit die Strömungsgeschwindigkeit und die, an das den Punkt umgebende Massenelement angreifenden, Kräfte der Größe und Richtung nach bestimmt werden können.

Die mathematische Beschreibung erfordert die Wahl zweckmäßiger Koordinatensysteme, auf die die Bewegungen zur Ortsbestimmung und Orientierung der Geschwindigkeiten und Kräfte bezogen werden und die Festlegung des Anfangszustandes, von dem aus die Zeitmessung erfolgt.

Die Form der Koordinatensysteme wird in der Folge zumeist der Strömungsform angepaßt, für allgemeine Betrachtungen das kartesische Koordinatensystem verwendet werden. Handelt es sich um die Beschreibung einer Strömung in einem gegen die Erde feststehenden Hohlraum, so genügt die Annahme eines mit der Erde fest verbunden gedachten Koordinatensystems; handelt es sich um die Beschreibung einer Strömung gegen einen in der strömenden Flüssigkeit bewegten Körper, so ist ein, mit dem sich bewegenden Körper fest verbundenes Koordinatensystem anzunehmen und dessen Bewegung gegenüber dem zur Erde feststehenden Koordinatensystem zu berücksichtigen; es finden hierbei die Grundsätze der Relativbewegung Anwendung.

Die auf ein Massenelement der Flüssigkeit wirkenden Kräfte sind teils Massenkräfte, teils Oberflächenkräfte. Als Massenkraft kommt vom rein physikalischen Standpunkt aus bei Beschreibung der Bewegung der Flüssigkeit im feststehenden Koordinatensystem nur die Schwerkraft in Betracht; bei Beschreibung in bezug auf das bewegliche Koordinatensystem sind nach dem Satz von Coriolis die Ergänzungskräfte der Relativbewegung als Massenkräfte hinzuzufügen; hierdurch wird bekanntlich erreicht, daß bei angenommener Ruhe dieses Koordinatensystems, unter dem Einfluß der Schwerkraft und der Ergänzungskräfte die Flüssigkeit dieselbe Bewegung

als absolute Bewegung annehmen würde, die sie dem bewegten Körper gegenüber als Relativbewegung ausführt; man hat also bei Aufstellung der Gleichungen in diesem Falle von einer Bewegung des (Körper-)Koordinatensystems abzusehen; dieselbe ist bereits in den Ausdrücken für die Ergänzungskräfte berücksichtigt.

Der bewegte Körper kann hierbei selbst von Flüssigkeit durchströmt werden; wie z. B. in Turbinen und in Kreiselpumpen.

An den Berührungsflächen der einzelnen Massenelemente untereinander sowie gegen andere Medien (Luft an den freien Oberflächen, festes Material an den Berührungsflächen mit festen Körpern usw.) treten Oberflächenkräfte auf, die im allgemeinen schräg, in der widerstandsfreien Flüssigkeit jedoch nur senkrecht gegen die Elemente der Oberfläche gerichtet sind; der Druck einer Flüssigkeit auf den von ihr benetzten Körper wird vermittelt durch die an der benetzten Berührungsfläche auftretenden Oberflächenkräfte.

In einem bestimmten Punkte der widerstandsfreien Flüssigkeit ist der Betrag der Oberflächenkraft pro Flächeneinheit für alle Richtungen oder, was dasselbe, für alle den Punkt enthaltenden Flächenelemente derselbe, heißt die Pressung im Punkte x, y z, und ist als Druck an allen Begrenzungsflächen eines Elementes gegen das Innere desselben gerichtet; Komponenten, die in die Fläche fallen, sind bei der widerstandsfreien Flüssigkeit nicht vorhanden; in der widerstandsbehafteten Flüssigkeit sind solche (kurz benannt) Tangentialkomponenten wirksam und besteht im Gegensatz zur widerstandsfreien Flüssigkeit nicht Gleichheit der Pressung, d. i. der Normaldrücke pro Flächeneinheit nach allen Richtungen, sondern es hat nur das arithmetische Mittel aus den Pressungen in je drei zueinander senkrechten Richtungen für einen bestimmten Punkt des Raumes denselben Wert, der als Mittelwert in die Gleichungen eintritt[1]).

I. Fundamentalgleichungen von Euler.

Für widerstandsfreie Bewegung.

Um einen Punkt mit den Koordinaten x, y, z eines kartesischen Koordinatensystems, Fig. 4, sei ein parallelepipedisches Raumelement mit den zu den Achsen parallelen unendlich kleinen Seitenlängen δ_x, δ_y, δ_z abgegrenzt; es liegt die Aufgabe vor, den Bewegungszustand derjenigen Flüssigkeitsteilchen zu beschreiben, die zur Zeit t durch dieses Raumelement fließen.

---

[1]) Siehe S. 135 u. f. und Lamb, Hydrodynamik, S. 658.

Der Massenmittelpunkt dieser Flüssigkeitsteilchen befindet sich zur Zeit t auf dem Element σ seiner Bahn, dessen Projektionen auf die Koordinatenachsen mit σ_x, σ_y, σ_z bezeichnet seien, und besitzt eine Geschwindigkeit v, deren Richtung mit jener von σ identisch ist; die Komponenten von v sind v_x, v_y, v_z.

Nach dem allgemeinen Gesetze: Masse · Beschleunigungskomponente gleich wirksame Kraftkomponente und den Bezeichnungen X, Y, Z, für diese Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen ergeben sich die drei Gleichungen

$$\varrho\,\delta_x\delta_y\delta_z \cdot \frac{dv_x}{dt} = X; \quad \varrho\,\delta_x\delta_y\delta_z \cdot \frac{dv_y}{dt} = Y; \quad \varrho\,\delta_x\delta_y\delta_z \cdot \frac{dv_z}{dt} = Z.$$

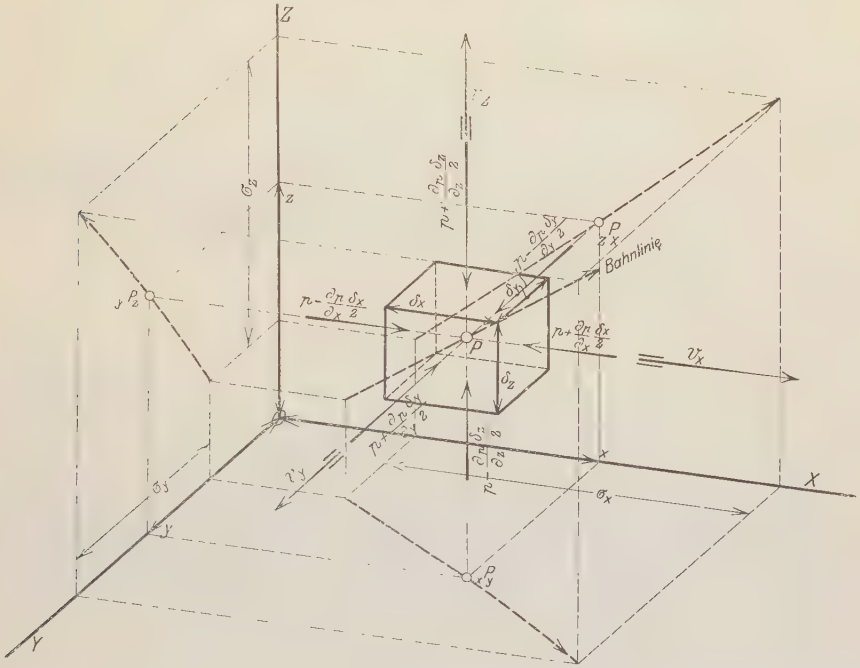

Fig. 4.

wobei ϱ den Betrag der spezifischen Masse der Flüssigkeit bedeutet. Die Komponenten X, Y, Z setzen sich je aus zwei Hauptteilen zusammen, d. s. erstens der den Massenkräften zukommende, zweitens der den Oberflächenkräften zukommende Teil; mit K_x, K_y, K_z als Werte der Massenkraftkomponenten pro Masseneinheit ergeben sich die Beträge der ersten Teile:

$$K_x \cdot \varrho\,\delta_x\delta_y\delta_z; \quad K_y \cdot \varrho \cdot \delta_x\delta_y\delta_z; \quad K_z \cdot \varrho\,\delta_x\delta_y\delta_z;$$

bezeichnet ferner p die Pressung im Punkt xyz zur Zeit t und sind $\frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{\partial p}{\partial y}$; $\frac{\partial p}{\partial z}$ die Beträge der Pressungsänderung pro Längeneinheit in Richtung der Koordinaten, so folgt für den Teilbetrag der Oberflächenkräfte

in der X-Richtung: $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta_y\delta_z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\delta_y\delta_z = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z$

„ „ Y- „ } in analoger Ableitung { $= -\frac{\partial p}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_z$

„ „ Z- „ } { $= -\frac{\partial p}{\partial z}\delta_x\delta_y\delta_z$

somit werden

$$X = \left(K_x - \frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta_x\delta_y\delta_z,$$

$$Y = \left(K_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta_x\delta_y\delta_z,$$

$$Z = \left(K_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta_x\delta_y\delta_z.$$

Die Beschleunigungskomponenten sind die Grenzwerte von

$$\frac{v_{x2} - v_{x1}}{\tau}, \quad \frac{v_{y2} - v_{y1}}{\tau}, \quad \frac{v_{z2} - v_{z1}}{\tau}$$

für $\lim \tau = 0$, wenn v_{x2}, v_{y2}, v_{z2} resp. v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, die Werte der Geschwindigkeitskomponenten in den Endpunkten des Bahnelementes σ bedeuten, das im Zeitelement τ vom Massenmittelpunkt des Flüssigkeitselementes zurückgelegt wird; die Größen der Geschwindigkeitskomponenten in einem Punkte sind im allgemeinen durch Werte von Funktionen der Koordinaten des Punktes bestimmt und an demselben Punkt mit der Zeit veränderlich; dementsprechend ergibt sich

$$v_{x2} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\sigma_y}{2} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\sigma_z}{2} + \frac{\partial v_x}{\partial t}\cdot\frac{\tau}{2},$$

$$v_{x1} = v_x - \frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot\frac{\sigma_x}{2} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\sigma_y}{2} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\sigma_z}{2} - \frac{\partial v_x}{\partial t}\cdot\frac{\tau}{2},$$

hiermit

$$\frac{v_{x2} - v_{x1}}{\tau} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot\frac{\sigma_x}{\tau} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\sigma_y}{\tau} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\sigma_z}{\tau} + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

und da die Grenzwerte von

$$\frac{\sigma_x}{\tau} = v_x, \quad \frac{\sigma_y}{\tau} = v_y, \quad \frac{\sigma_z}{\tau} = v_z$$

sind, so folgt:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

und in analoger Ableitung

$$\begin{cases} \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{cases}$$

Durch Einsetzen dieser Beschleunigungswerte und der Werte für X, Y, Z in die ursprünglichen Gleichungen und Division durch $\varrho\, \delta_x\, \delta_y\, \delta_z$ erhält man folgende drei Bewegungsgleichungen:

$$K_x - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad \ldots \quad \text{I}$$

$$K_y - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \ldots \quad \text{II}$$

$$K_z - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \ldots \quad \text{III}$$

Das Raumelement δ_x, δ_y, δ_z wird von Flüssigkeit durchströmt; ändert sich die Dichte der Flüssigkeit mit der Zeit, so wird auch der Masseninhalt des Raumelementes sich mit der Zeit ändern. Es ist noch der Strömungsvorgang mathematisch zu formulieren.

Die Flüssigkeit strömt mit der Geschwindigkeit v_x durch die Fläche $\delta_y \cdot \delta_z$ des Punktes x, y, z: es ist daher $\left(v_x \cdot \varrho - \frac{\partial v_x \varrho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \delta y\, \delta z$ die pro Zeiteinheit in der X-Richtung in das Element eintretende, $\left(v_x \cdot \varrho + \frac{\partial v_x \cdot \varrho}{\partial x} \cdot \frac{\delta x}{2}\right) \delta y\, \delta z$ die pro Zeiteinheit in derselben Richtung austretende Masse; mithin ist: $-\frac{\partial v_x \cdot \varrho}{\partial x}\, \delta x\, \delta y\, \delta z$ die Änderung des Masseninhaltes, die durch die Strömungskomponente in der X-Richtung verursacht wird; ebenso erhält man $-\frac{\partial v_y}{\partial y}\, \delta x\, \delta y\, \delta z$ und $-\frac{\partial v_z}{\partial z}\, \delta x\, \delta y\, \delta z$ für die anderen Richtungen und schließlich als Ausdruck für die Änderung des gesamten Masseninhaltes pro Zeiteinheit im Raumelement zur Zeit t:

$$\frac{\partial \varrho\, \delta x\, \delta y\, \delta z}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial t}\, \delta x\, \delta y\, \delta z$$

die Summe der Einzeländerungen muß gleich der Gesamtänderung sein, woraus mit obigen Werten die Gleichung folgt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial v_x \cdot \varrho}{\partial x} + \frac{\partial v_y \cdot \varrho}{\partial y} + \frac{\partial v_z \varrho}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots \text{IV}$$

diese Gleichung heißt die Kontinuitätsgleichung.

Die Gleichungen I, II, III, IV sind die Eulerschen Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik. Für inkompressible reibungsfreie, also ideale Flüssigkeiten als deren nächster Repräsentant das Wasser angenommen wird, ändern sich die Gleichungen I, II, III der Form nach nicht, es nimmt lediglich ϱ einen konstanten Wert und hiermit die Gleichung IV die Form an:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV}_a$$

Diese Summe der drei partiellen Differentialquotienten heißt die räumliche Dilatation. Entsprechend Gleichung IV_a ist bei Bewegung einer idealen Flüssigkeit die räumliche Dilatation konstant gleich Null.

Die Gleichungen I, II, III geben mit $v_x = 0$, $v_y = 0$ und $v_z = 0$ die Grundgleichungen der Hydrostatik; dieselben lauten:

$$K_x - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}_s$$

$$K_y - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}_s$$

$$K_z - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{III}_s$$

In den Gleichungen I, II, III und IV entfallen die Glieder mit den partiellen Ableitungen nach der Zeit t, wenn die Bewegung eine derartige ist, daß Geschwindigkeits- und Pressungszustand sich im allgemeinen wohl von Ort zu Ort ändert, aber an jedem Ort zeitlich unveränderlich ist. Eine solche Bewegung wird als stationär oder nach Grashof als permanent bezeichnet. Deren Fundamentalgleichungen sind:

$$K_x - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \ldots\ldots \text{I}_p$$

$$K_y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \ldots\ldots \text{II}_p$$

$$K_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \ldots\ldots \text{III}_p$$

$$\frac{\partial v_x \cdot \varrho}{\partial x} + \frac{\partial v_y \cdot \varrho}{\partial y} + \frac{\partial v_z \cdot \varrho}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV}_p$$

IV_p gilt dann, wenn ϱ von der Pressung p beeinflußt wird.

Für den Fall der inkompressiblen Flüssigkeit, d. i. $\varrho =$ konstant wird $\mathrm{IV}_p = \mathrm{IV}_a$.

Mit den Grundgleichungen und den Bedingungsgleichungen des jeweiligen Problems können im Prinzip die Geschwindigkeitskomponenten und die Pressungen als Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit t bestimmt werden.

Ist der Bewegungszustand ein stationärer, so entfällt die Abhängigkeit von t; v_x, v_y, v_z und p erscheinen nur als Funktionen von x, y, z und lassen sich aus den Funktionswerten der Geschwindigkeitskomponenten die Gleichungen der Bahnlinien ableiten: da nämlich für jeden Punkt einer Strombahn

$$v_x = \lim \frac{\sigma_x}{\tau} = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \lim \frac{\sigma_y}{\tau} = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \lim \frac{\sigma_z}{\tau} = \frac{dz}{dt}$$

ist, so ergeben sich aus

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{v_z}{v_y} = \frac{dz}{dy}; \quad \frac{v_x}{v_z} = \frac{dx}{dz}$$

die totalen Differentialgleichungen der Projektionen der Strombahnen auf die Koordinatenebenen

$$\left.\begin{aligned} (+v_y)\,dx + (-v_x)\,dy &= dF_{xy} \\ (+v_z)\,dy + (-v_y)\,dz &= dF_{yz} \\ (+v_x)\,dz + (-v_z)\,dx &= dF_{zx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathrm{V}$$

worin F_{xy}, F_{yz}, F_{zx} einerseits die Bedeutung von Funktionszeichen und andererseits, sofern es sich um Feststellung der einzelnen Strombahnen handelt, die Bedeutung von Parametern haben.

Wenn der Bewegungszustand zeitlich veränderlich ist, so haben die Strombahnen keine dauernde Gestalt; denn die Gleichungen für v_x, v_y und v_z enthalten auch die Zeit als Variable.

Benutzt man trotzdem die gleichen Ansätze V, indem man t ebenfalls als Paramter betrachtet, so erhält man durch V die Gleichungen für momentane Strombahnen und zwar ist der Zeitmoment durch den jeweiligen Parameterwert t bestimmt; diese momentanen Strombahnen oder in kürzerer Bezeichnung „Stromlinien“ sind nicht identisch mit den wirklichen Strombahnen der einzelnen Flüssigkeitselemente, sondern dieselben charakterisieren die Aufeinanderfolge der Flüssigkeitselemente in deren Bewegungsrichtung im Zeitmoment.

Beispiel: In einer an sich ruhenden Flüssigkeit wird durch einen Körper, Fig. 5, der irgendeine (der Einfachheit halber z. B. geradlinige und gleichförmig angenommene) Translationsbewegung besitzt, eine Strömung erzeugt, indem der Körper einerseits Flüssigkeitsteilchen vor sich herschiebt, anderseits dem-

selben solche folgen, hierbei geraten nicht nur die in unmittelbarer Nähe des Körpers befindlichen, sondern auch andere Teile der Flüssigkeitsmasse in Bewegung; jedes Flüssigkeitsteilchen wird zu einer bestimmten Zeit eine bestimmte Bewegungsrichtung besitzen, wobei sich eine derartige Aufeinanderfolge von Flüssigkeitsteilchen ergibt, daß Kurven als Verbindungslinien von Massenmittelpunkten gezogen werden können, deren Tangenten den momentanen Bewegungsrichtungen entsprechen; im nächsten Zeitmoment befindet sich der Körper bereits an einem anderen Ort; es kann unter Umständen die Gruppierung der bewegten Flüssigkeit um ihn und relativ zu ihm der Gestalt nach kongruent der früheren sein, aber in den kongruenten Kurven um zwei Lagen des Körpers befinden sich nicht mehr dieselben Flüssigkeitsteilchen, jedes derselben hat seinen Ort sowohl gegenüber dem bewegten Körper als auch gegenüber dem feststehenden Raum, in dem sich die Flüssigkeit befindet, verändert; die Aufeinanderfolge der Orte eines Flüssigkeitsteilchens gegenüber dem bewegten Körper gibt in diesem Fall der Kongruenz der Stromlinien eine dauernde relative Strombahn im bewegten Koordinatensystem; die Aufeinanderfolge der Orte desselben Teilchens im feststehenden Raum gibt die wirkliche Strombahn dieses, aber auch nur dieses Teilchens im feststehenden Koordinatensystem.

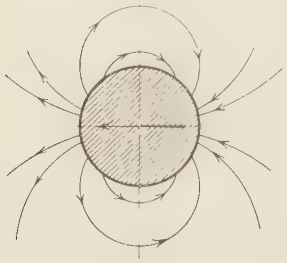

Fig. 5.

Noch einmal hervorgehoben sei, daß die Ableitung dieser Fundamentalgleichungen auf die Aufgabe aufgebaut ist, die Bewegungszustände derjenigen Flüssigkeitsteilchen zu beschreiben, die im Laufe der Zeit in ein Raumelement gelangen; ist die Aufgabe vorgelegt, die Bewegungszustände eines Flüssigkeitsteilchens zu beschreiben, die dasselbe längs seiner Bahn annimmt, so ergeben sich anders geformte Gleichungen, die ebenfalls von Euler herrühren, jedoch den Namen Lagrangesche Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik führen; da jedoch in der Folge die hydrodynamischen Probleme hauptsächlich auf Grund der ersteren behandelt werden, sei bezüglich der letzteren auf die Literatur hingewiesen.

II. Allgemeine Form der Grundgleichungen.

Die Gleichungen

$$K_x + W_x - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} \quad \ldots \quad \mathrm{I}_w$$

$$K_y + W_y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \ldots \quad \mathrm{II}_w$$

$$K_z + W_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \ldots \quad \mathrm{III}_w$$

IV

können als allgemeineres Resultat der Ableitung der Gleichungen I. II, III, IV gelten, wenn mit W_x, W_y, W_z die Komponenten einer Beschleunigung eingeführt werden, in denen der Einfluß der Reibung respektive der Reibung und der Turbulenz zum Ausdruck kommt.

a) Grundgleichungen bei innerer Reibung[1]).

Die Ergänzung der Eulerschen Fundamentalgleichungen mit Rücksicht auf innere Reibung wurde zuerst von Navier-Poisson, später von de Saint-Venant und Stokes durchgeführt.

Die Werte W_x, W_y, W_z werden in diesem Fall durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \frac{1}{3}\frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\nabla^2 v_x \\ W_y &= \frac{1}{3}\frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\eta}{\varrho}\nabla^2 v_y \\ W_z &= \frac{1}{3}\frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\eta}{\varrho}\nabla^2 v_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{V}$$

in denselben bedeuten η den Poisseuilleschen Reibungskoeffizienten, $\Theta = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$ die räumliche Dilatation und

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 v_x &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \nabla^2 v_y &= \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \nabla^2 v_z &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{V}$$

die sogenannten zweiten Differenzparameter von v_x, v_y, v_z.

Bei unzusammendrückbaren Flüssigkeiten ist ϱ konstant, mithin die räumliche Dilatation $\Theta = 0$. Die Ausdrücke für die Komponenten W_x, W_y, W_z werden:

$$W_x = \frac{\eta}{\varrho}\nabla^2 v_x; \qquad W_y = \frac{\eta}{\varrho}\nabla^2 v_y; \qquad W_z = \frac{\eta}{\varrho}\nabla^2 v_z.$$

Für die Folge wichtig sind die Resultate, die auf Grundlage dieser Gleichungen für die Bewegung in geraden kreiszylindrischen Röhren erhalten werden:

---

[1]) Bezüglich der Ableitungen wird auf die Literatur, namentlich Lamb, Hydrodynamik § 319, S. 672, verwiesen.

In einer Röhre von konstantem kreiszylindrischen Querschnitt ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Abstand r von der Achse

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta L}(r_a^2 - r^2),$$

worin Δ die Pressungsdifferenz auf die Länge L, r_a den Radius der Röhrenwand und η den Koeffizienten der inneren Reibung bedeuten. Hieraus ergibt sich die Durchflußmenge pro Zeiteinheit

$$q = \frac{\pi r_a^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}$$

und die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \frac{r_a^2}{8\eta}\frac{\Delta p}{L},$$

so daß mit $r_a = \frac{D}{2}$ als die auf S. 8 angegebene Formel II d. i. $\Delta p = \frac{32\eta L v_m}{D^2}$ erscheint.

Die Gleichung für q bildet die Grundlage für die Versuche zur Bestimmung der Koeffizienten.

Entsprechend der am Schlusse auf S. 14 bezüglich der Bedeutung von p gegebenen Erklärung ist in diesem Falle p als der Mittelwert der Pressungen in drei zueinander senkrechten Richtungen zu betrachten.

v_x, v_y, v_z behalten ihre Bedeutung als Komponenten der Geschwindigkeiten nach den Koordinatenrichtungen in den einzelnen Punkten des von Flüssigkeiten erfüllten Raumes bei.

b) Grundgleichungen bei innerer Reibung und Turbulenz[1]).

Die Untersuchung des Einflusses der Turbulenz wurde sowohl von Osborne Reynolds als auch von Lorentz ohne Berücksichtigung der Zusammendrückbarkeit, also unter der Annahme $\gamma = \text{konst.}$ und unter Ausschluß äußerer Massenkräfte, also

$$K_x = 0, \quad K_y = 0, \quad K_z = 0,$$

durchgeführt; der leitende Grundgedanke dieser Untersuchungen besteht in der Teilung der Bewegung in die Hauptbewegung und in die turbulente Bewegung in dem Sinne, daß jener das Weiterfließen, dieser hingegen die unregelmäßigen wirbelnden Bewegungen zugeteilt wurden; diese Teilung wird zum Ausdruck gebracht durch die Relationen

$$v_x = \bar{v}_x + v_x'; \quad v_y = \bar{v}_y + v_y'; \quad v_z = \bar{v}_z + v_z';$$

worin $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$ und $\bar{p}$ Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten der Hauptbewegung, v_x', v_y', v_z' und p' die, der turbulenten Bewegung

---

[1]) Bezüglich der Ableitung wird auf die Abhandlung III von Lorentz, S. 43 bis 71, verwiesen: „Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und den Einfluß dieser Bewegungen bei der Strömung durch Rohre".

entsprechenden, Geschwindigkeits- resp. Pressungsanteile bedeuten. Die Bildung der Mittelwerte ist hierbei in der Weise vorgenommen gedacht, daß die Bewegung $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$ einfacher ist als die wirkliche, ohne daß alle Einzelheiten der Turbulenz verschwinden; dieselbe kann auf dreierlei Art erfolgen und zwar in bezug auf:
entweder einen kleinen Zeitabschnitt (τ),

$$\bar{v}_x = \frac{1}{\tau}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} v_x\, dt$$

oder einen kleinen Längsabschnitt (s)

$$\bar{v}_x = \frac{1}{s}\int v_x\, ds$$

oder einen kleinen Raumteil (S)

$$\bar{v}_x = \frac{1}{S}\int v_x\, dS,$$

wobei in jedem Bewegungsfalle diejenige Art zu wählen ist, durch die die Turbulenz noch genügend zum Ausdruck kommt.

Für die Anteile v_x', v_y', v_z' wird die Eigenschaft angenommen, daß ihre Mittelwerte gleich Null sind.

In den allgemeinen Grundgleichungen I_w, II_w, III_w, IV_w sind die Geschwindigkeiten und die Pressung diejenigen der Hauptbewegung und wird

$$W_x = \frac{\eta}{\varrho}\,\nabla^2\bar{v}_x - \left[\frac{\partial}{\partial x}\bar{v}_x'^2 + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v_x' v_y'} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v_x' v_z'}\right]$$

$$W_y = \frac{\eta}{\varrho}\,\nabla^2\bar{v}_y - \left[\frac{\partial}{\partial x}\overline{v_y' v_y'} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{v}_y'^2 + \frac{\partial}{\partial z}\overline{v_y' v_z'}\right]$$

$$W_z = \frac{\eta}{\varrho}\,\nabla^2\bar{v}_z - \left[\frac{\partial}{\partial z}\overline{v_z' v_x'} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{v_y' v_z'} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{v}_z'^2\right].$$

Lorentz zeigt, daß die Glieder in den eckigen Klammern einem Transport von Bewegungsgröße infolge der turbulenten Bewegung entsprechen, wodurch Tangentialkomponenten der Oberflächenkräfte also gleichsam neue Reibungen entstehen.

In § 13 der Orgininalabhandlung von Lorentz werden diejenigen Gleichungen abgeleitet, mittels deren man bei gegebener Hauptbewegung die turbulente Bewegung bestimmen könnte; in den §§ 14 bis und mit 17 wird die bezügliche Untersuchung für die stationäre

Strömung durch ein gerades Rohr mit kreisförmigem Querschnitt durchgeführt und die Resultate mit denjenigen der Poisseuilleschen Strömung verglichen.

Unter Annahme geradliniger, achsenparalleler Hauptbewegung wird für die Geschwindigkeit derselben die Formel abgeleitet:

$$v = \frac{q}{k \cdot \eta} (r_a^2 - r^2) - \frac{1}{\eta} \int_r^{r_a} Q \cdot dr$$

wobei $Q = \varrho\, v'_\varphi \cdot v_\psi$ ist, mit v'_φ und v'_ψ als Geschwindigkeitskomponenten der Turbulenz von der Eigenschaft, daß der Mittelwert $v'_\varphi \cdot v_\psi$ nur von r abhängt; q bedeutet das Druckgefälle auf die Länge L $\left(\text{es ist also } q = \frac{\Delta p}{L}\right)$ und η den Koeffizienten der inneren Reibung.

Das Resultat wurde unter folgenden Annahmen erhalten:

1. Die mittlere turbulente Bewegung ist für alle Querschnitte konstant; diese Annahme beruht auf der durch Versuche festgestellten Tatsache, daß die für eine bestimmte Ausflußmenge nötige Druckdifferenz auch bei Vorhandensein von Turbulenz der Röhrenlänge proportional ist; dementsprechend konnten alle partiellen Ableitungen nach der Achsenrichtung von Mittelwerten der Produkte von Geschwindigkeitskomponenten der Turbulenz, sowie auch diejenige der Hauptbewegung gleich Null gesetzt werden.

2. An der Röhrenwand werden alle Geschwindigkeitskomponenten gleich Null entsprechend der Annahme des Haftens.

3. Wegen Symmetrie um die Achse sind v und alle Mittelwerte der Produkte von Geschwindigkeitskomponenten der Turbulenz nur von r abhängig; das bedingt naturgemäß Vernachlässigung des Einflusses der Schwerkraft und hiermit Weglassung der Komponenten derselben in den Gleichungen a.

Im weiteren wird bewiesen, daß durch die Turbulenz die Ergiebigkeit bei gleicher Druckdifferenz auf dieselbe Länge gegenüber einer geradlinigen Strömung mit lediglich innerer Reibung verkleinert wird, und daß hierbei das Geschwindigkeitsgefälle längs eines Radius von der Mitte zu zuerst langsamer, gegen die Rohrwand viel schneller zunimmt als bei der Poisseuilleschen Strömung.

Auf Grund der allgemeinen Gleichungen wurden von Reynolds auch Beweise für die Existenz einer kritischen Geschwindigkeit als Grenze des stabilen Zustandes erbracht, die für spezielle Fälle hierbei errechneten Resultate für die Größe derselben weichen allerdings von den Versuchswerten ab, was

jedoch begreiflich erscheint, da die Form der eigentlichen Turbulenz doch nur angenommen und auf Grund dieser Annahme in die Gleichungen eingeführt werden konnte; die Form der Gleichung für die kritische Geschwindigkeit entspricht jedoch der empirisch gefundenen.

Einen Versuch, aus den Grundgleichungen Formeln für die Bestimmung der Turbulenz abzuleiten, hat Boussinesq in seiner Théorie de l'excoulement tourbillonant et tumultueux des liquides, 1897, Paris Gauthier-Villars et fils, unternommen; es werden ebenfalls durch Teilung der Bewegung in 2 Teile die Navier-Possonschen Formeln umgeändert und durch Anpassung des Reibungskoeffizienten an die Bazinschen Versuche die quantitative Übereinstimmung der theoretischen mit den Versuchsresultaten zu erreichen gesucht. Lorentz weist jedoch darauf hin, daß hierbei gerade die der turbulenten Bewegung entsprechenden Glieder vernachlässigt seien. Siehe Abhandlungen der mathem. Physik, S. 62.

II. Hydrostatik.

Die Hydrostatik beschreibt die Zustände der ruhenden Flüssigkeit; es folgen aus den Bewegungsgleichungen die drei Hauptgleichungen (siehe Seite 18):

$$K_x - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad K_y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad K_z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad . \quad \text{A}$$

Die Kontinutätsgleichung reduziert, sich auf

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{B}$$

Aus letzterer Gleichung ist zu folgern, daß der Ruhezustand zeitliche Unveränderlichkeit der Dichte bedingt.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Ruhe gegenüber der Erde, wobei die Flüssigkeit sich in einem mit der Erde fest verbundenen Raum befindet; es sind dann K_x, K_y, K_z lediglich die Komponenten der Schwerkraft:

2. Die Ruhe gegenüber einem Raum (Hohlraum eines Gefäßes), der sich gegenüber der Erde in Bewegung befindet; K_x, K_y, K_z bestehen dann aus den Komponenten der Schwerkraft und aus den Komponenten der ersten Ergänzungskraft der Relativbewegung, da die zweite Ergänzungskraft gleich Null ist.

Zur Abkürzung seien die Bezeichnungen: absolute Ruhe für den ersten Fall, relative Ruhe für den zweiten Fall eingeführt.

A. Absolute Ruhe.

I. Zustandsbestimmung.

In dem mit der Erde festverbundenen kartesischen Koordinatensystem sei die positive Z-Achse lotrecht entgegengesetzt der Richtung der Schwerkraft angenommen.

Es werden dann $K_x = 0$; $K_y = 0$; $K_z = -g$, da $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ vereinfachen sich die Gleichungen A_* auf

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A$$

Unter Berücksichtigung, daß p im allgemeinen von Zeit und Ort abhängt, also

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz$$

ist, folgt

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t}\, dt - \gamma \cdot dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad C$$

Die Integration ist möglich entweder,

1. wenn $\frac{\partial p}{\partial t}$ nur eine Funktion von t und gleichzeitig γ nur eine Funktion von z ist, es ist dann mit $T = \int \frac{\partial p}{\partial t}\, dt$ und $Z = \int \gamma\, dz$:

$$p = T + Z$$

und ergibt sich, daß die Horizontalebenen die Orte gleichzeitiger konstanter Pressung sind, daß jedoch der Pressungswert der einzelnen Flächen zeitlich veränderlich ist; die Horizontalebenen sind hierbei auch Orte gleicher Dichte der Flüssigkeit, die aber mit Rücksicht auf Gleichung B zeitlich konstant bleiben muß. Dieser Zustand kann eintreten, wenn eine an sich inhomogene, aber inkompressible Flüssigkeit in einem offenen Gefäß zur Ruhe gekommen ist, die Dichte daher nur mit der Tiefe veränderlich, die Pressung an der freien Oberfläche zeitlich veränderlich ist; selbstverständlich ist auch der Fall der konstanten Dichte eingeschlossen;

2. wenn $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$; es kann hierbei γ eine Funktion von z, also die Flüssigkeit auch kompressibel sein;

Es ist dies der natürliche Fall der absoluten Ruhe, der Unveränderlichkeit der Pressung an der freien Oberfläche bedingt.

Ist $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ und γ unveränderlich, so folgt aus Gleichung C_* durch Integration

$$p = \text{Konstante} - \gamma z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad C_{**}$$

dieselbe drückt ebenfalls aus, daß die Horizontalebenen Flächen gleicher Pressung oder in gebräuchlicher Niveauflächen sind. Durch

die Form der Niveauflächen und die denselben zukommenden Pressungswerte ist der Zustand der Flüssigkeit charakterisiert.

Ist in der Niveaufläche mit der Ordinate z_0 die Pressung $= p_0$, so folgt durch Elimination der Konstanten

$$p - p_0 = \gamma (z_0 - z) \quad \ldots \ldots \ldots \quad C_{***}$$

An der freien Oberfläche ist die Pressung konstant, daher ist dieselbe eine Niveaufläche; kommt derselben die Ordinate z_0 zu, so bedeutet p_0 die Pressung des an der freien Oberfläche anstehenden Mediums (Luft, Gas, ...), bezeichnet man $h = z_0 - z$, so folgt schließlich die praktische Hauptgleichung:

$$p = p_0 + \gamma \cdot h \quad \ldots \ldots \ldots \quad C$$

die besagt, daß die Pressung in einem Punkt der Flüssigkeit gleich ist, der Pressung an der freien Oberfläche mehr einem Betrage gleich dem Gewichte einer lotrechten Flüssigkeitssäule von der Höhe h und dem Querschnitt gleich der Flächeneinheit.

Dividiert man in C durch γ, so erhält man $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + h$.

$\frac{p}{\gamma}$ und $\frac{p_0}{\gamma}$ haben die Dimension von Längen und heißen die Flüssigkeitssäulen der Pressungen p und p_0; ist p_0 die atmosphärische Pressung also $= 10000$ kg/qm entsprechend einer neuen Atmosphäre $=$ kg/qcm, so folgt mit $\gamma = 1000$ kg/cbm als Gewicht von 1 cbm Wasser:

$\frac{p_0}{\gamma} = 10$ m als Wassersäule der atmosphärischen Pressung.

$p - p_0$ nennt man auch den Überdruck pro Flächeneinheit; durch Manometer und Piezometer werden zumeist Überdrücke gemessen.

Im folgenden werden, sofern nichts Gegenteiliges bemerkt ist, γ und p_0 immer als konstant angenommen.

II. Bestimmung der Drucke auf Oberflächenteile fester Körper.

Unter dem Einfluß der Pressung p entstehen auf die benetzte Oberfläche eines mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden festen Körpers (Gefäß, eingetauchter Körper, Schwimmkörper) wirksame Druckkräfte; um über deren Größe, Verteilung und Wirkung Aufschluß zu erhalten, werden vorerst die Druckkräfte bestimmt, die auf einen abgegrenzten Teil der Oberfläche parallel zu den Koordinatenachsen und parallel zu einer angenommenen Richtung wirksam

sind. Für die bezügliche Untersuchung sei das kartesische Koordinatensystem wie früher mit lotrechter Z-Achse, aber deren positive Richtung in Richtung der Schwerkraft fallend angenommen; es ändert dies an den Koordinaten x, y nichts; statt h kann aber bequemerweise z geschrieben werden, wenn man die XY-Ebene in die freie Oberfläche verlegt.

Es sei nun df ein Element eines begrenzten Teiles[1]) f der benetzten Oberfläche; der Mittelpunkt des Elementes df habe die Koordinaten x, y, z, die Normale in demselben, genommen in Rich-

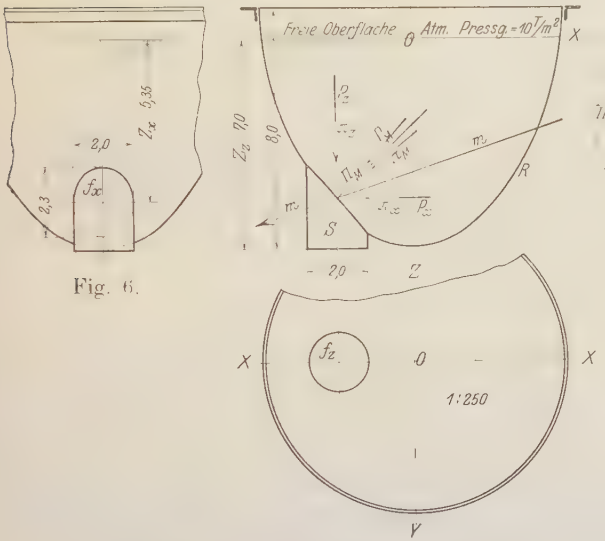

Fig. 6.

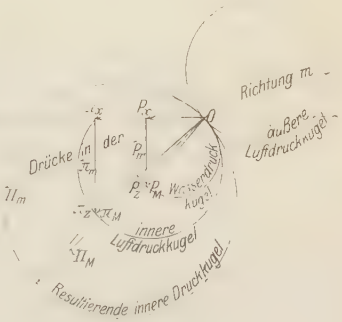

Fig. 7.

tung der Wirkung der Pressung, also von der Flüssigkeit gegen die Fläche, sei gegen die Koordinatenachse unter den Winkeln nx, ny, nz geneigt; die totalen Druckkräfte, die auf f parallel zu den Koordinatenachsen wirksam sind, seien mit Π_x, Π_y, Π_z bezeichnet; es sei ferner eine Richtung m durch die Winkel mx, my, mz mit den Koordinatenachsen gegeben; die totale Druckkraft, die auf f parallel zu dieser Richtung wirksam ist, sei mit Π_m, deren Komponenten parallel zu den Koordinaten-Achsen mit Π_{mx}, Π_{my}, Π_{mz} bezeichnet.

Die Pressung im Punkte X, Y, Z ist nach Gleichung C jedoch mit der Bezeichnung z statt h

$$p = p_0 + \gamma z.$$

[1]) Hierzu die Figuren 6 und 7.

Es ergeben sich damit folgende Werte der elementaren Drücke

$$dH_x = p\,df\cos nx = p_0\cos nx\,df + \gamma z\cos nx\,df$$
$$dH_y = p\,df\cos ny = p_0\cos ny\,df + \gamma z\cos ny\,df$$
$$dH_z = p\,df\cos nz = p_0\cos nz\,df + \gamma z\cos nz\,df$$

und sofern man mit nm den Winkel zwischen Normale n und Richtung m bezeichnet

$$dH_m = p\,df\cos nm = p_0\cos nm\,df + \gamma z\cos nm\,df.$$

durch Integration über die ganze Fläche f ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} H_x &= p_0\int\cos nx\,df + \gamma\int z\cos nx\,df = \pi_x + P_x \\ H_y &= p_0\int\cos ny\,df + \gamma\int z\cos ny\,df = \pi_y + P_y \\ H_z &= p_0\int\cos nz\,df + \gamma\int z\cos nz\,df = \pi_z + P_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{D}$$

$$H_m = p_0\int\cos nm\,df + \gamma\int z\cos nm\,df = \pi_m + P_m \quad \ldots \quad \text{E}$$

Man erkennt, daß jede der Kräfte H aus zwei Teilen besteht, von denen der eine von p_0, der andere von γ und z abhängig ist; es erscheint nun vorteilhaft, die Teile vorerst getrennt zu verfolgen und dann die Resultate zur kombinieren.

a) Bestimmung der Kräfte π.

Entsprechend der Bezeichnungnn in D und E folgt

$$\pi_x = p_0\int\cos nx\,df \qquad \pi_z = p_0\int\cos nz\,df$$
$$\pi_y = p_0\int\cos ny\,df \qquad \pi_m = p_0\int\cos nm\,df$$

Da $\cos nx\,df$; $\cos ny\,df$; $\cos nz\,df$; $\cos nm\,df$ der absoluten Größe nach die Projektionen von df auf Ebenen senkrecht zu den Koordinatenachsen und zur Richtung m sind, je nach der Größe der Winkel nx, ny, nz und nm aber positive oder negative Werte erhalten, so folgt, daß die Werte

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \int\cos nx\,df; \quad f_y = \int\cos ny\,df \\ f_z &= \int\cos nz\,df; \quad f_m = \int\cos nm\,df \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{F}$$

bei Ausführung der Integration über die ganze Fläche f je die Flächeninhalte der Projektionen der Abgrenzungslinie der Fläche f auf die Koordinatenebenen und auf eine zur Richtung m senkrechte Ebene darstellen; zwischen diesen Flächenwerten besteht eine Beziehung, die sich aus der letzten Gleichung durch Berücksichtigung der Identität

$$\cos nm = \cos nx\cos mx + \cos ny\cos my + nz\cos mz$$

ergibt; man erhält

$$f_m = \cos m\,x \int \cos n\,x\,df + \cos m\,y \int \cos n\,y\,df + \cos m\,z \int \cos n\,z\,df$$

oder

$$f_m = f_x \cos m\,x + f_y \cos m\,y + f_z \cos m\,z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{G}$$

Die durch diese Gleichung beschriebene Beziehung ermöglicht eine geometrische Deutung: trägt man nämlich auf einem durch den Koordinatenursprung parallel zur Richtung m gelegten Strahl von Ursprung aus eine Länge $\lambda = \alpha \cdot f_m$ ab, so daß also α den Maßstab für die Darstellung von f_m durch eine Länge bedeutet, so ist erkenntlich, daß

$$\cos m\,x = \frac{\lambda_x}{\lambda}; \qquad \cos m\,y = \frac{\lambda_y}{\lambda}; \qquad \cos m\,z = \frac{\lambda_z}{\lambda}$$

gesetzt werden können, wenn mit λ_x, λ_y, λ_z die Koordinaten des Endpunktes der Strecke λ bezeichnet werden; man erhält dann aus der letzten Gleichung für f_m durch Multiplikation mit α

$$\lambda = \alpha f_x \cdot \frac{\lambda_x}{\lambda} + \alpha f_y \cdot \frac{\lambda_y}{\lambda} + \alpha f_z \cdot \frac{\lambda_z}{\lambda}$$

und weiter, da

$$\lambda^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2$$

ist, nach entsprechender Umformung

$$\left(\lambda_x - \frac{\alpha f_x}{2}\right)^2 + \left(\lambda_y - \frac{\alpha f_y}{2}\right)^2 + \left(\lambda_z - \frac{\alpha f_z}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2),$$

d. h. die Endpunkte der Strecke λ die verschiedenen Richtungen m entsprechend liegen auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunktskoordinaten $= \frac{\alpha f_x}{2}, \frac{\alpha f_y}{2}, \frac{\alpha f_z}{2}$ sind; der Koordinatenursprung liegt demnach auf der Kugelfläche; der Maximalwert von λ entspricht dem Durchmesser der Kugel, es ist also

$$\lambda_{max} = \alpha \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2},$$

mithin

$$f_M = f_{m\,max} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{H}$$

die Richtung von f_M ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos Mx = \frac{f_x}{f_M}, \quad \cos My = \frac{f_y}{f_M}, \quad \cos Mz = \frac{f_z}{f_M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{J}$$

Sind daher die Projektionen f_x, f_y, f_z bekannt, so ist f_M und die Richtung von M durch die Gleichungen H und J bestimmt; da durch die Gleichung $f_m = \int \cos n\,m\,df$ bei gegebener Richtung m f_m eindeutig bestimmt ist, so folgt, daß bei angenommener Lage des Koordinatenursprungs die relative Lage der Kugel zur Fläche f ebenfalls eine eindeutig bestimmte ist, daß hiermit die Summe der

Quadrate dreier Projektionsflächen f_a, f_b, f_c von der Abgrenzungslinie von f auf drei zueinander senkrechten aber sonst beliebigen Richtungen konstant und gleich f_M^2 ist.

Die im Koordinatenursprung senkrecht auf M stehende Ebene ist eine Tangentialebene der Kugel; für Richtungen parallel zu dieser Ebene sind die Flächenwerte der Projektonen $f_m = 0$; die gegen diese Ebene symmetrisch liegende Kugel gibt negative Flächenwerte.

Diese Eigenschaften der f_x, f_y, f_z, f_m sind unmittelbar auf die Kräfte π_x, π_y, π_z, π_m übertragbar, da dieselben nach den Gleichungen D, E und F einfach proportional sind, nämlich:

$$\pi_x = p_0 f_x,\ \pi_y = p_0 f_y,\ \pi_z = p_0 f_z,\ \pi_m = p_0 f_m \quad \ldots \quad \text{K}$$

und ergeben folgende Grundsätze:

1. Die unter dem Einfluß der Pressung p_0 an der freien Oberfläche einer in absoluter Ruhe befindlichen Flüssigkeit auf einen abgegrenzten Teil der von letzterer benetzten Oberfläche eines festen Körpers in einer bestimmten Richtung wirksamen Druckkraft ist bestimmt durch das Produkt aus dem Pressungswert p_0 in den Flächeninhalt der Projektion der Abgrenzungslinie der Flächenteile.
2. Es gibt eine Richtung M, für die die Druckkraft ein Maximum wird; in Richtungen senkrecht zu M ist die Druckkraft gleich Null; man kann die Maximalkraft als Normaldruck der äußern Pressung auf die Fläche f bezeichnen.
3. Die Richtung von M gegen die Koordinaten XYZ ist bestimmt durch die Gleichungen J.
4. Graphisch können die Resultate 1—3 durch Aufzeichnung einer Kugel dargestellt werden, deren Mittelpunkts-Koordinaten proportional $\frac{\pi_x}{2}$, $\frac{\pi_y}{2}$, $\frac{\pi_z}{2}$ und deren Durchmesser proportional $\sqrt{\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2}$ sind; siehe Beispiel Seite 29.
5. Da für jede Richtung m die elementaren Druckkräfte als Parallelkräfte wirksam sind, so kann die ganze Druckkraft als Einzelkraft von der Größe $p_0 f_m$ angenommen werden, die durch den Schwerpunkt der Fläche geht.

b) Bestimmung der Kräfte P.

Es ist weiteres entsprechend den Gleichungen D, E und F

$$P_x = \gamma \int z\, df_x$$
$$P_y = \gamma \int z\, df_y$$
$$P_z = \gamma \int z\, df_z$$
$$P_m = \gamma \int z\, df_m$$

Man kann nun den in den Gleichungen für P_x, P_y P_z vorkommenden Integralen folgende Deutung geben: die Werte der Integrale in P_x und P_y sind die Produkte aus den Flächenwerten f_x und f_y, in deren Schwerpunktsabstände z_x und z_y von der freien Oberfläche; der Wert des Integrals P_z gibt das Volumen das durch f dessen Projektion f_z in der freien Oberfläche und die zwischen den Bewegungslinien von f und f_z liegende Zylinderfläche mit lotrechten Erzeugenden begrenzt ist und dargestellt werden kann durch das Produkt aus dem Flächenwert f_z in die mittlere Höhe dieses Volumens, so daß man erhält

$$P_x = \gamma z_x f_x; \quad P_y = \gamma z_y f_y; \quad P_z = \gamma z_z f_z \quad \ldots\ldots \text{L}$$

zwischen diesen Werten und dem Integralwert $\gamma \int z\, df_m$ besteht ein Zusammenhang, der sich ergibt, wenn man für df_m den ursprünglichen Wert $\cos(n\, m\, df)$ nimmt und wieder die Identität berücksichtigt

$$\cos n\, m = \cos n\, x \cos m\, x + \cos n\, y \cos m\, y + \cos n\, z \cos m\, z,$$

es folgt dann

$$\int z\, df_m = \cos m_x (z_x f_x) + \cos m\, y\, (z_y f_y) + \cos m\, z\, (z_z f_z)$$

und mithin

$$P_m = P_x \cos m\, x + P_y \cos m\, y + P_z \cos m\, z \quad \ldots\ldots \text{N}$$

Die Gleichungen N und G haben dieselbe Form, es können daher die aus G gezogenen Folgerungen bezüglich der Veränderlichkeit von f_m auch für die Veränderlichkeit von P_m angewendet werden, d. h. die Längenabschnitte auf Strahlen durch den Koordinatenursprung mit der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt die Koordinaten $\frac{P_x}{2}$, $\frac{P_y}{2}$, $\frac{P_z}{2}$ besitzt und deren Durchmesser $P_M = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$ ist, sind ein Maß der vom Flüssigkeitsdruck herrührenden Druckkräfte in Richtung des jeweiligen Strahles.

P_M stellt den Maximalwert dieses Druckes dar, derselbe tritt bei einer Richtung M ein, die im Koordinatensystem durch

$$\cos M_x = \frac{P_x}{P_M}; \quad \cos M_y = \frac{P_y}{P_M}; \quad \cos M_z = \frac{P_z}{P_M}$$

bestimmt ist.

Für Richtungen senkrecht zu M ergibt sich die Größe von P_M zu Null. P_M kann daher als der Normal-Flüssigkeitsdruck auf die Fläche F bezeichnet werden. Negativen Drücken entsprechen Strahlabschnitte durch die symmetrische Kugelfläche.

Da durch die Gleichung $P_m = \gamma \int z \cos n\, m\, df$ der Druck P_m eindeutig nach Größe und Richtung bestimmt ist, so ist auch die Lage

der Kugelfläche relativ zur Fläche f bei angenommenem Koordinatenursprung eindeutig bestimmt.

Man kann der Größe P_m durch folgende Umformung noch eine andere Deutung geben, wenn man

$$P_m = \gamma \int z \cos n\,m\, df = \int \gamma\, z\, df_m = \cos m\,z \int \gamma \frac{z}{\cos m\,z}\, df_m$$

$$P_m = \cos m\,z \int \gamma\, z'\, df_m$$

setzt. z' ist der Abstand des Elementes von der freien Oberfläche in der Richtung m und daher $G' = \int \gamma\, z'\, df_m$ das Gewicht des Flüssigkeitsvolumens, das durch die Fläche f, die durch deren Umgrenzungslinie als Leitlinie mit zu m parallelen Erzeugenden bestimmten Zylinderfläche und das durch letztere aus der freien Oberfläche ausgeschnittene Flächenstück bestimmt ist.

Es folgt daraus die Gleichung

$$P_m = G' \cos m\,z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad G'$$

Da die Elemente als Parallelkräfte wirksam sind, so kann deren Gesamtheit durch eine Einzelkraft von der Größe G' ersetzt werden, die durch den Schwerpunkt des Volumens gehend parallel zu m wirksam ist.

Der Wert von G' kann auch ausgedrückt werden durch $G' = z'_m \cdot f_m$, wobei dann z'_m die mittlere Länge des zylindrischen Volumens $\int \gamma z' df_m$ bedeutet, so daß schließlich mit $z'_m \cos m\,z = z_m$, $P_m = \gamma z_m \cdot f_m$ und damit die Gleichung für P_m auf dieselbe Form gebracht ist, wie diejenigen von P_x, P_y und P_z, es ist aber zu beachten, daß den z-Werten in diesen Gleichungen verschiedene Bedeutungen zukommen, nämlich:

In den Gleichungen für P_x und P_y bedeuten z_x und z_y die Schwerpunktsabstände der Flächen f_x und f_y von der freien Oberfläche in P_z bedeutet z_z die mittlere Länge eines Zylinders vom Volumen $\int z\, df_z$ mit f_z als Grundfläche in P_m bedeutet z_m die Projektion auf die Z-Richtung, der in Richtung m gemessenen mittleren Länge eines Zylinders vom Volumen $\int \frac{z}{\cos m\,z}\, df_m$ mit f_m als Grundfläche.

Auch bei Bestimmung der Lagen der Kräfte als Einzelnkräfte ergibt sich eine Verschiedenheit: die Lagen von P_m und P_z sind durch die Schwerpunkte der Volumina $\int z' df_m$ und $\int z\, df_z$ bestimmt; für die Abstände von P_x und P_y ergeben sich die in folgender Tabelle (S. 35) angeführten Beziehungen. Darin bedeuten r_x, r_y die Radien der Trägheitsmomente von f_x und f_y in bezug auf die Y resp. Achse; r_{yz} und r_{xz} die Radien der Zentrifugalmomente von f_x und f_y in bezug auf die Achsen Y und Z resp. X und Z; f_x und f_y sind hierbei in die bezüglichen Koordinatenebenen projiziert angenommen.

Kraft		P_x	P_y
Q) Abstand von	XY	$\zeta_x = \frac{\gamma \int z^2 f_x}{\gamma \int z\, df_x} = \frac{r_x^2}{z_x}$	$\zeta_y = \frac{\gamma \int z^2 df_y}{\gamma \int z\, df_y} = \frac{r_y^2}{z_y}$
	YZ		$\xi_y = \frac{\gamma \int xz\, df_y}{\gamma \int z\, df_y} = \frac{r_{xz}^2}{z_y}$
	ZX	$\eta_x = \frac{\gamma \int yz\, df_x}{\gamma \int z\, df_x} = \frac{r_{yz}^2}{z_x}$	

Diese Ergebnisse können in folgenden Grundsätzen zusammengefaßt werden:

1. Die unter dem Einfluß der Schwere von einer in absoluter Ruhe befindlichen Flüssigkeit auf einen abgegrenzten Teil f der von letzterer benetzten Oberfläche eines festen Körpers in einer bestimmten Richtung m ausgeübte Druckkraft ist bestimmt durch das Produkt aus dem Gewicht eines Flüssigkeitsvolumens, das von der Fläche f, der durch die Abgrenzungslinie von f als Leitlinie mit zu m parallelen Erzeugenden bestimmten Zylinderfläche und dem von diesem Zylinder aus der freien Oberfläche ausgeschnittenem Flächenstück begrenzt ist, in den Cosinus des Neigungswinkels von m gegen die Lotrechte.

Für jede wagrechte Richtung tritt an Stelle eines solchen Produktes das Gewicht eines Flüssigkeitszylinders mit der Projektionsfläche der Abgrenzungslinie auf die Ebene senkrecht zur Richtung als Grundfläche und dem Abstand des Schwerpunktes der Projektionsfläche als Höhe.

2. Es gibt eine Richtung M, für die die Druckkraft ein Maximum wird, in Richtungen senkrecht zu M ist die Druckkraft gleich Null man kann diese Maximalkraft als Normalflüssigkeitsdruck auf die Fläche bezeichnen.

3. Die Größe von M ist durch Gleichung N, deren Richtung durch die Gleichungen 0 bestimmt.

4. Graphisch können die Resultate 1 bis 3 wieder durch Aufzeichnung einer Kugel dargestellt werden.

5. Als einzelne Kraft kann P_m wirksam in einer zu m parallelen Geraden angenommen werden, die durch den Schwerpunkt des oben angegebenen Flüssigkeitsvolumens geht.

Für jede wagrechte Richtung von m geht P_m durch denjenigen Punkt der Projektionsfläche, in einer Ebene senkrecht zu m, dessen Koordinaten in dieser Ebene im Sinne der Gleichungen zu bestimmen sind. Die Anwendung dieser Grundsätze erfordert die Bestimmung der Hilfsgrößen:

f_x, f_y, f_z, f_m,	z_x, z_y,	z_z, z_m,	r_x, r_y, r_{xz}, r_{yz}
Projektionsflächen	Schwerpunktsabstände	mittlere Längen	Trägheitsradien

die nach bekannten Methoden erfolgen kann.

c) Zusammenfassung der Drucke.

Sind für einen Flächenteil nach obigen Grundsätzen die Werte π_x, π_y, π_z; P_x, P_y, P_z und aus denselben π_m, P_m bestimmt, so ergeben sich die Größenwerte der totalen Druckkräfte $\Pi_x\, \Pi_y\, \Pi_z, \Pi_m$ mit Rücksicht auf die Gleichungen D_* und E_* durch Summierung; da jedoch die Mittelpunkte der den Größen π_m und P_m entsprechenden Kugeln nicht gleiche Koordinaten besitzen, so ist π_M nicht durch die algebraische, sondern durch die geometrische Summe von π_M und P_M bestimmt.

Π_M kann unter gleichen Überlegungen wie für π_M und P_M als die totale Normaldruckkraft auf die Fläche f bezeichnet werden.

Für die Bestimmung der Lage der Einzelkräfte Π könnten unter Verwendung des Momentensatzes die nötigen Orts- und Richtungsbestimmungen durchgeführt, doch erscheint es bequemer, die Lagebestimmung durch Bestimmung der Resultierenden der beiden je einer Richtung m entsprechenden Einzelnkräfte π_m und P_m vorzunehmen.

Die aus obigen Grundsätzen und Erörterungen sich ergebende Methode für die Bestimmung der Druckkräfte auf einen Flächenteil f bei gegebener Lage desselben gegen die freie Oberfläche ist durch nachstehende Reihenfolge gegeben:

1. Festlegung des Koordinatensystems mit lotrechter Z-Achse, die positive Z-Richtung entgegen der Schwerkraft; die freie Oberfläche als xy-Ebene.

2. Bestimmung der Projektionen von f auf die Koordinatenebenen und der Schwerpunktslagen von f_x in YZ von f_y in XZ.

3. Bestimmung der Größen π_x, π_y, π_z und P_x, P_y, P_z und hieraus Π_x, Π_y, Π_z entsprechend den Gleichungen K, L und R.

4. Konstruktion der Kugeln für π_m, P_m und Π_m. Man erhält hiermit für jede Richtung die Größenwerte von π_m, P_m und Π_m und einzeln die Werte π_M, P_M und Π_M.

Soll dann für irgendeine Richtung m die Lage der Einzelnkraft m bestimmt werden, so sind zuerst die Lagen der Einzelnkräfte π_m und P_m, und hieraus die Lage der Resultierenden der Kräfte π_m und P_m, d. i. eben von Π_m in bekannter Weise zu bestimmen, womit die Aufgabe gelöst ist.

III. Spezielle Fälle.

a) Symmetrische Form der Fläche.

Die Gleichungen für die Kugeln π_m, P_m und Π_m vereinfachen sich, wenn die Fläche eine ebene Fläche oder von solcher Gestalt ist, daß dieselbe eine vertikale Symmetrieebene besitzt; wählt man in diesen Fällen die Lage der YZ-Ebene derart, daß dieselbe senkrecht zur Ebene der Fläche steht resp. mit der Symmetrieebene zusammenfällt, so werden f_y und damit π_y, P_y und $\Pi_y = 0$; die Kugelmittelpunkte fallen in die XZ-Ebene, die die Kugeln nach größten Kreisen schneidet, aus denen die Werte und Lagen von π_M, P_M und Π_M entnommen werden können; noch einfacher, auch bezüglich der Bestimmung der Schwerpunktslagen der Flächen $f_x = f_m$, sowie der in Frage kommenden Volumen wird die Bestimmung, wenn die ebene Fläche eine vertikale Symmetrieebene besitzt.

Ist f ein Teil der Wand des Gefäßes, in dem sich die Flüssigkeit befindet und steht der äußere Teil derselben unter gleicher Pressung wie die freie Oberfläche, so genügt es, sofern die Dicke der Wand genügend klein ist, die Bestimmung nur für den Flüssigkeitsdruck durchzuführen, da sich die auf beiden Seiten der Gefäßwand unter dem Einfluß der äußeren Pressung entstehenden Drucke aufheben; aus diesem Grunde wurde für die Flüssigkeitsdrucke die Bezeichnung P gewählt.

Bedeutet f die ganze benetzte Oberfläche des die Flüssigkeit enthaltenden Gefäßes, so folgt aus $P_z = \gamma \int z \, df_z$, daß der totale Flüssigkeitsdruck auf das Gefäß in lotrechter Richtung gleich dem Gewichte der im Gefäß enthaltenen Flüssigkeit ist.

b) Bodendruck, hydrostatisches Paradoxon.

Für ein Flächenteil, das durch eine unterhalb der freien Oberfläche liegende, ebene, horizontale Linie abgegrenzt ist, ist die Größe des Flüssigkeitsdruckes in lotrechter Richtung gleich dem Betrage des Flüssigkeitsvolumens, das durch den Flächenteil f, die durch die Abgrenzungslinie bis zur freien Oberfläche gelegte Zylinderfläche und dem durch letztere aus der freien Oberfläche ausgeschnittenen Flächenstück begrenzt; dieselbe ist unabhängig von der sonstigen Form des Gefäßes; wegen letzterer Eigenschaft wurde die geschilderte Erscheinung als hydrostatisches Paradoxon benannt.

Die Bedeutung desselben kann durch beistehende Fig. 8 veranschaulicht werden: im oben und unten offenen Gefäß A befindet sich ein dicht anschließender Kolben K; ersteres ist durch die Füße F, letz-

terer durch die Säule S mit der Fußplatte B fest verbunden; im Gefäß befindet sich oberhalb des Kolbens Flüssigkeit, O ist die freie Oberfläche; im Zusammenhang aller Teile wird die Fußplatte durch das Gewicht des Flüssigkeitsinhaltes und das Gewicht der Einzelteile, d. h. Gefäß, Kolben, Füße und Säule belastet, hingegen belasten der Kolben und die Säule die Fußplatte durch ihr Eigengewicht und den Flüssigkeitsdruck auf den Kolben in lotrechter Richtung, das Gefäß belastet die Fußplatte durch sein und seiner Füße Eigengewicht, vermindert um den Flüssigkeitsdruck auf den konischen Teil des Gehäuses in lotrechter Richtung.

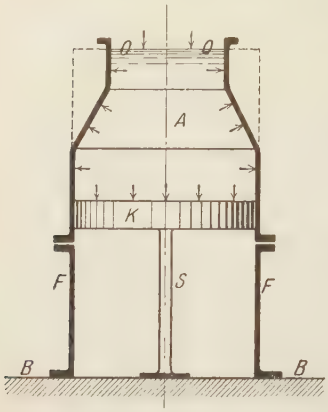

Fig. 8.

In jeder wagerechten Richtung ist der totale Flüssigkeitsdruck auf die ganze benetzte Fläche des Gefäßes gleich Null, da die Abgrenzungslinie sich als Geraden auf die vertikalen Koordinatenebenen projiziert und daher f_x und f_y gleich Null werden.

Die Druckkugeln P_m berühren die freie Oberfläche, es kommt jedoch nur die positive Druckkugel in Betracht; es ist $P_M = P_z$ gleich dem Gewicht des Flüssigkeitsinhaltes.

c) Druck auf einen eingetauchten Körper (Schwimmen).

Für einen in der Flüssigkeit befindlichen Körper ist, sofern derselbe ganz untergetaucht ist, die benetzte Fläche f gleich der ganzen Oberfläche des Körpers; sofern derselbe nur teilweise untergetaucht ist, wird die benetzte Fläche durch die Schnittlinie der freien Oberfläche mit der Körperoberfläche begrenzt; in beiden Fällen sind die totalen Flüssigkeitsdrucke in wagerechten Richtungen gleich Null; der vertikale Flüssigkeitsdruck gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit; diesen Flüssigkeitsdruck nennt man den Auftrieb oder speziell im Schiffsbau das Deplacement; derselbe ist der Schwere entgegengerichtet; die Druckkugeln Pm berühren in diesem Fall ebenfalls die freie Oberfläche, es kommt jedoch nur die negative Kugel in Betracht mit dem Durchmesser $P_{m_{max}} = P_M = P_z =$ dem Auftrieb.

In der Form: Ein Körper verliert in einer Flüssigkeit so viel an Gewicht, als dem durch ihn verdrängten Flüssigkeitsvolumen entspricht, sind obige Ergebnisse als Archimedisches Prinzip bekannt.

Der Körper kann innerhalb der Flüssigkeit schwimmen, wenn sein Gewicht gleich, er sinkt unter bis zur Berührung mit dem Gefäßboden, wenn sein Gewicht größer, er wird teilweise eingetaucht schwimmen, wenn sein Gewicht kleiner als der Auftrieb ist, der seinem ganzen Volumen entspricht.

Der Bestand des Auftriebes reicht für die Erhaltung eines stabilen Gleichgewichtszustandes beim Schwimmen nicht aus, wie sich aus folgender Überlegung ergibt Fig. 9:

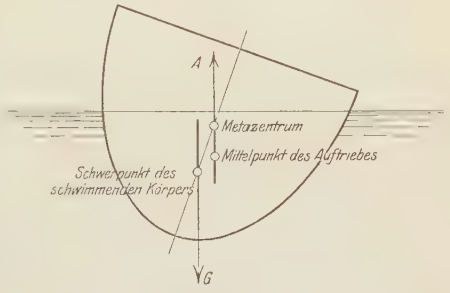

Fig. 9.

Fallen die Wirkungslinie der Körperschwere und jene des Auftriebes nicht in eine Lotrechte, sind jedoch Gewicht und Auftrieb der Größe nach gleich, so bilden beide Kräfte ein Kräftepaar, das jedenfalls eine drehende Bewegung des Körpers einleitet; es ist also in erster Linie für den Gleichgewichtszustand und damit für die Erhaltung der Ruhe nötig, daß beide Wirkungslinien sich in derselben Lotrechten befinden; Stabilität einer Gleichgewichtslage wird aber weiter nur dann vorhanden sein, wenn bei einer Ablenkung des Körpers aus dieser Lage durch das entstehende Kräftepaar eine automatische Rückbewegung in die frühere Lage veranlaßt wird, d. h. wenn das Moment des Kräftepaares entgegengesetzt der Ablenkung dreht, im anderen Fall tritt Kippen (Kentern) des Körpers ein.

Die Erfüllung dieser Bedingung für die Wirksamkeit des Kräftepaares hängt ersichtlicherweise einerseits von der Lage seines Schwerpunktes ab, die ihrerseits wieder bestimmt ist durch die Massenverteilung im Körper; im allgemeinen ist die Lage des Angriffspunktes des Auftriebes von der Form des eingetauchten Teiles des Körpers abhängig; einzig die Richtung des Auftriebes bleibt immer parallel, aber entgegengesetzt der Schwere; es gibt allerdings Fälle, bei denen die Lage des Angriffspunktes des Auftriebes gegenüber der jeweilen eingetauchten Oberfläche desselben eine unveränderliche ist, wie z. B. bei voller Tauchung (Unterseeboote), oder wenn die Oberfläche des Körpers eine Rotationsfläche ist und die Massenverteilung im Körper derartig ist, daß im Gleichgewichtszustand die geometrische Achse der Oberfläche parallel zur freien Oberfläche zu liegen kommt; in diesem Fall bleibt bei Ablenkungen, die einer Umdrehung des Körpers um eine zur geometrischen parallelen Achse entsprechen, die Lage des Angriffspunktes des Antriebes gegenüber der eingetauchten Oberfläche unveränderlich, bei anderen Ablenkungen ist dies nicht der Fall, bei der Kugel stets.

Die Bewegung, die der abgelenkte Körper anzunehmen strebt, ist im allgemeinen zweifacher Art. Ist mit der Ablenkung eine Verminderung der Größe des Auftriebes verbunden, so resultiert aus den beiden Kräften: Körpergewicht und Auftrieb eine in vertikal und im Sinne der Schwere oder gegen dieselbe gerichtete Einzelnkraft, je nachdem die Größe des Gewichtes oder diejenige des Auftriebes überwiegt, und ein in der Ebene der beiden Kräfte wirksames Kräftepaar; durch die Einzelnkraft wird eine in lotrechter Richtung sich abspielende Translationsbewegung eingeleitet, die in ihrem Verlaufe im allgemeinen periodi-

scher Natur sein wird, da mit dem damit verbundenen wechselnden Tauchen die Größe des Auftriebes wechselt und daher auch die Wirkungsrichtung der Einzelnkraft wechselt; durch das Kräftepaar wird eine Drehung um eine Schwerpunktsachse eingeleitet, die jedoch nach bekannten Sätzen der Dynamik starrer Körper nur dann senkrecht zur Ebene des Kräftepaares erfolgt, wenn die dieser Richtung entsprechende Schwerpunktsachse eine freie Achse des Körpers ist; in jedem andern Fall beginnt die Drehung um eine anders liegende Schwerpunktsachse und verläuft diese Art der Bewegung nach einer Pendelung mit wechselnder Pendelrichtung.

Das Problem ist, wenn man vom Einfluß der mit der Bewegung des Körpers naturgemäß verbundenen Bewegung der Flüssigkeit absieht, auf ein solches der Dynamik starrer Körper zurückgeführt, dessen Lösung jedoch durch den Umstand kompliziert wird, daß die Größe des Auftriebes von der Größe und der Form des verdrängten Flüssigkeitsvolumens und dessen Angriffspunkt und damit von der Form der bewegten Körperoberfläche abhängig, und da dieselbe bei der Bewegung sich ändert, mit derselben zeitlich veränderlich sind.

Für den Fall, daß der Körper eine horizontalliegende freie Hauptachse besitzt, daß die Ablenkung in einer Drehung um die letztere bestanden hat und daß hierbei der Schwerpunkt des Körpers und der Angriffspunkt des Auftriebes in einer Ebene senkrecht zur Achse geblieben sind, läßt sich die Bedingung für die Stabilität des Gleichgewichtes hinsichtlich der Drehung einfach präzisieren.

Es ist nämlich ohne weiteres aus Fig. 9 zu erkennen, daß das Gleichgewicht ein stabiles ist, wenn die Richtungslinie des Auftriebes A die Schwimmachse in einem Punkt schneidet, der oberhalb des Schwerpunktes liegt; bei einer Lage des Schwerpunktes über diesem Schnittpunkt tritt Kentern ein, das Gleichgewicht ist labil; fällt der Schnittpunkt mit dem Schwerpunkt zusammen, so ist das Gleichgewicht indifferent, d. h. es könnte, wenn dies bei allen der Fall wäre, jede Lage eine Gleichgewichtslage sein.

Dieser Schnittpunkt heißt das Metazentrum, sein Abstand vom Schwerpunkt die Metazenterhöhe.

Im geschilderten Spezialfall wird die Ablenkung neben der periodischen Translationsbewegung in lotrechter Richtung eine schwingende Bewegung um die freie Achse einleiten; unter dem Einfluß der Flüssigkeitswiderstände werden die Bewegungen schließlich bis zum Gleichgewichtszustand abgedämpft.

B. Relative Ruhe.

Wenn ein Gefäß, in dem sich Flüssigkeit befindet, selbst eine Bewegung besitzt, so erscheint im allgemeinen der Bestand relativer Ruhe nicht gesichert und ergibt sich als erstes Problem die Bestimmung solcher Bewegungsarten, bei denen dieser Bestand möglich ist.

I. Allgemeine Untersuchung.

Die in den Grundgleichungen enthaltenen Größen K_x, K_y, K_z sind hierbei durch Summierung der Beschleunigungskomponenten der Schwerkraft mit den Komponenten der ersten Ergänzungsbeschleunigung der Relativbewegung zu bilden; für irgendeinen durch die Koordinaten x, y, z in dem mit dem Gefäß verbundenen Koordinatensystem bestimmten Punkt ist letztere der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt der diesem Punkt als Gefäßpunkt zukommenden Beschleunigung.

Multipliziert man die Grundgleichungen A (Seite 26) mit dx, dy, dz und berücksichtigt wieder, daß im allgemeinen p örtlich und zeitlich unveränderlich, daß also

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

ist, so erhält man durch Addition

$$\frac{1}{\varrho}dp = K_x dx + K_y dy + K_z dz + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial t}dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{C}$$

wobei wie im ersten Fall die Gleichung gilt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{B}$$

Die Gleichung B ergibt ebenfalls wie im ersten Fall die Bedingung zeitlicher Unveränderlichkeit der Dichte der Flüssigkeit, und hiermit für den Fall, daß ϱ abhängig von p ist, auch die Bedingung zeitlicher Unveränderlichkeit der Pressung, welch letztere Bedingung jedoch entfällt, wenn die Flüssigkeit überhaupt inkompressibel, d. h. ϱ konstant angenommen wird. Aus Gleichung C folgt nun die für die Lösung obiger Frage wichtigste Bedingung für die Möglichkeit des Bestandes relativer Ruhe: damit die rechte Seite von C zu einem totalen Differential wird, müssen K_x, K_y, K_z von einer Potentialfunktion K ableitbar sein, so daß sich ergibt:

$$K_x = \frac{\partial K}{\partial x}; \quad K_y = \frac{\partial K}{\partial y}; \quad K_z = \frac{\partial K}{\partial z}; \quad \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial t}.$$

Die Werte von K_x, K_y, K_z ergeben sich wie folgt: in Fig. 10 ξ, η, ζ sei das mit der Erde fest verbundene Koordinatensystem, in dem sich das mit dem Gefäß verbunden gedachte Koordinatensystem X, Y, Z bewegt; diese Bewegung kann jederzeit als eine Translation mit für alle Punkte des beweglichen Systems gleichen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten, verbunden mit 3 Drehungen um die Achsen OX, OY, OZ aufgefaßt werden.

Die Komponenten der Translation sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}_\xi &= \frac{d\xi}{dt}; \quad \mathfrak{B}_\eta = \frac{d\eta}{dt}; \quad \mathfrak{B}_\zeta = \frac{d\zeta}{dt} \\ \mathfrak{p}_\xi &= \frac{d^2\xi}{dt^2}; \quad \mathfrak{p}_\eta = \frac{d^2\eta}{dt}; \quad \mathfrak{p}_\zeta = \frac{d^2\zeta}{dt^2} \end{aligned}\right\} \text{ mit } \xi,\ \eta \text{ und } \zeta \text{ als Koordinaten des Punktes } O.$$

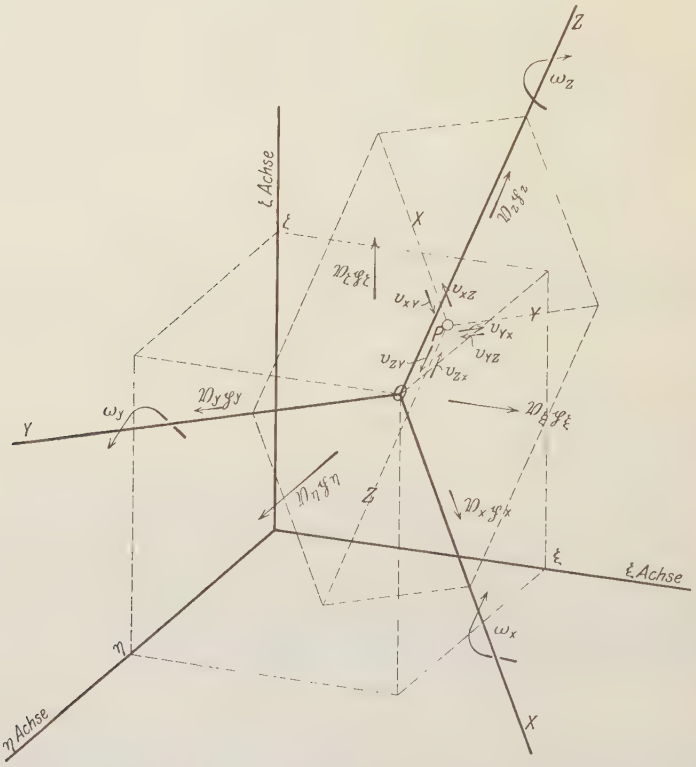

Fig. 10.

Da die Grundgleichungen auf das System X, Y, Z bezogen sind, so sind auch die Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten nach den Richtungen OX, OY und OZ zu bestimmen.

Werden die Richtungskosinuse dieser 3 Achsen gegen diejenigen des festen Systems nach beistehendem Schema bezeichnet:

	X	Y	Z
ξ	a_1	a_2	a_3
η	b_1	b_2	b_3
ζ	c_1	c_2	c_3

so daß z. B. $b_2 =$ dem Kosinus des Neigungswinkels von Y gegen η ist, so folgt für die Komponenten der Translationsbewegung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V}_x &= \mathfrak{V}_\xi a_1 + \mathfrak{V}_\eta b_1 + \mathfrak{V}_\zeta c_1 \\ \mathfrak{V}_y &= \mathfrak{V}_\xi a_2 + \mathfrak{V}_\eta b_2 + \mathfrak{V}_\zeta c_2 \\ \mathfrak{V}_z &= \mathfrak{V}_\xi a_3 + \mathfrak{V}_\eta b_3 + \mathfrak{V}_\zeta c_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_x &= \mathfrak{p}_\xi a_1 + \mathfrak{p}_\eta b_1 + \mathfrak{p}_\zeta c_1 \\ \mathfrak{p}_y &= \mathfrak{p}_\xi a_2 + \mathfrak{p}_\eta b_2 + \mathfrak{p}_\zeta c_2 \\ \mathfrak{p}_z &= \mathfrak{p}_\xi a_3 + \mathfrak{p}_\eta b_3 + \mathfrak{p}_\zeta c_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{b}$$

Die Komponenten der Drehungen ergeben sich für einen Punkt, aus dessen Koordinaten x, y, z aus den Winkelgeschwindigkeiten ω_x, ω_y, ω_z des bewegten Koordinatensystems um dessen Achsen und deren Ableitungen ω_x', ω_y', ω_z' nach der Zeit in folgender Zusammenstellung:

als Komponentenrichtungen	X	Y	Z	als Drehachsen
X	$v_{xx} = 0$;	$v_{xy} = +z\,\omega_y$;	$v_{xz} = -y\,\omega_z$	Geschwindigkeitskomponenten der Drehungen
Y	$v_{yx} = -z\,\omega_x$;	$v_{yy} = 0$;	$v_{yz} = +x\,\omega_z$	
Z	$v_{zx} = +y\,\omega_x$;	$v_{zy} = -x\,\omega_y$;	$v_{zz} = 0$	

c

als Komp.-Richtungen	X	Y	Z als Drehachsen
	$\beta_{xx} = 0$;	$\beta_{xy} = z\,\omega_y' - x\,\omega_y^2$;	$\beta_{xz} = -\omega_z'\,y - x\,\omega_z^2$
	$\beta_{yx} = -z\,\omega_x' - y\,\omega_x^2$;	$\beta_{yy} = 0$;	$\beta_{yx} = +x\,\omega_z' - y\,\omega_z^2$
	$\beta_{zx} = +y\,\omega_x' - z\,\omega_x^2$;	$\beta_{zy} = -x\,\omega_y' - z\,\omega_y^2$;	$\beta_{zz} = 0$

Beschleunigungskomponenten der Drehungen . . . . . d

Die Komponenten der Schwerebeschleunigung in Richtung X, Y, Z sind bei lotrecht entgegengesetzt der Schwere gerichteter positiver ζ-Achse.

$$\gamma_x = -g\,c_1; \quad \gamma_y = -g\,c_2; \quad \gamma_z = -g\,c_3 \quad \text{e}$$

Das Bildungsgesetz für die Komponenten von R ist hiermit

$$K = \gamma - \mathfrak{p} - \beta$$

und mithin

$$\begin{aligned} K_x &= \gamma_x - \mathfrak{p}_x + y\,\omega_z' - z\,\omega_y' + x\,(\omega_y^2 + \omega_z^2) \\ K_y &= \gamma_y - \mathfrak{p}_y + z\,\omega_x' - x\,\omega_z' + y\,(\omega_z^2 + \omega_x^2) \\ K_z &= \gamma_z - \mathfrak{p}_z + x\,\omega_y' - y\,\omega_x' + z\,(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{aligned}$$

Als abgeleitete einer Potentialfunktion unterstehen die Größen K_x, K_y, K_z den Bedingungen

$$\frac{\partial K_x}{\partial y} = \frac{\partial K_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial K_y}{\partial z} = \frac{\partial K_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial K_z}{\partial x} = \frac{\partial K_x}{\partial z},$$

woraus sich ergibt, daß

$$\omega_z' = -\omega_z'; \quad \omega_x' = -\omega_x'; \quad \omega_y' = -\omega_y'$$

oder

$$\omega_z' = \omega_x' = \omega_y' = 0$$

sein müssen, d. h. für den Bestand einer Potentialfunktion K und damit für die Möglichkeit des Bestandes relativer Ruhe ist nötig, daß die Drehungskomponenten der Gefäßbewegung konstante Winkelgeschwindigkeit besitzen, woraus wieder folgt, daß die resultierende Drehachse sich nur unter Parallelverschiebung bewegen darf.

Die Ausdrücke für K_x, K_y, K_z reduzieren sich auf

$$K_x = (\gamma_x - \mathfrak{p}_x) + (\omega_y^2 + \omega_z^2)\, x$$
$$K_y = (\gamma_y - \mathfrak{p}_y) + (\omega_z^2 + \omega_x^2)\, y$$
$$K_z = (\gamma_z - \mathfrak{p}_z) + (\omega_x^2 + \omega_y^2)\, z.$$

Es ergibt dies als allgemeines Integral von c die Gleichung

$$\frac{p}{\varrho} = (\gamma_x - \mathfrak{p}_x)\, x + (\omega_y^2 + \omega_z^2)\frac{x^2}{2} + (\gamma_y - \mathfrak{p}_y)\, y + (\omega_z^2 + \omega_x^2)\frac{y^2}{2}$$
$$(\gamma_z - \mathfrak{p}_z)\, z + (\omega_x^2 + \omega_y^2)\frac{z^2}{2} + T \quad \ldots\ldots \quad \text{D}$$

mit T als einer reinen Zeitfunktion.

Aus dieser Gleichung lassen sich die weiteren Bedingungen für die Möglichkeit des Bestandes relativer Ruhe entnehmen, wenn man berücksichtigt, daß die Größen γ und $\mathfrak{p}$, da dieselben nach den Gleichungen b und e die im allgemeinen von der Zeit abhängigen Richtungskosinuse a, b, c usw. enthalten, ebenfalls Zeitfunktionen sind.

Man erkennt nun, daß in allen Fällen, in denen $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ sein muß (d. h. wenn die Flüssigkeit kompressibel ist), die Werte der Richtungskosinuse, so wie die in $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ enthaltenen Werte von $\mathfrak{p}_\xi$, $\mathfrak{p}_\eta$ und $\mathfrak{p}_\zeta$ von der Zeit unabhängig, also konstante sein müssen, d. h. die Gefäßbewegung kann dabei entweder nur eine Translationsbewegung mit der Größe und Richtung nach konstanter Beschleunigung oder eine Drehbewegung um eine festruhende oder um eine mit konstanter Beschleunigung parallel verschobene Drehachse sein; da die Kompressibilität bei Wasser und ähnlichen Flüssigkeiten nur eine sehr geringe ist, so erscheint der Fall $\varrho =$ konstant als der praktisch wichtigere; in diesem Fall ist der Bestand der Möglichkeit relativer Ruhe nicht durchaus an die Bedingung $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ gebunden; führend wird hierbei vielmehr die Untersuchung der relativen Bewegung

der Niveauflächen; ist das Gefäß offen, die Flüssigkeit mithin gegen die Luft durch eine freie Oberfläche abgegrenzt, so muß die relative Lage derselben naturgemäß bei relativer Ruhe konstant bleiben; im geschlossenen, voll angefüllten Gefäß entfällt letztere Bedingung.

II. Relative Ruhe in offenen Gefäßen (mit freier Oberfläche).

Die angeführte Bedingung wird in folgenden Bewegungsfällen erfüllt:

a) Die Bewegung besteht nur in einer lotrechten Translation, wobei jedoch die Beschleunigung zeitlich variabel sein kann; in diesem Fall reduziert sich die Gleichung D auf[1])

$$\frac{p}{\varrho} = (\gamma_z - \mathfrak{p}_z)\, z + T$$

γ_z wird $= -g$ und $\mathfrak{p}_z = \mathfrak{p}_\zeta$; es ergeben sich die Niveauflächen als wagrechte Ebenen mit zeitlich veränderlichen Funktionswerten, wobei die Bedingung zu berücksichtigen ist, daß der Wert der Pressung niemals negativ wird; bezeichnet man mit p_0 die Pressung an der freien Oberfläche und mit z_0 den Koordinatenwert der letzteren, und nimmt man Unveränderlichkeit der Pressung an der freien Oberfläche, also $T =$ konstant an, so folgt:

$$\frac{p - p_0}{\varrho} = (g + \mathfrak{p}_\zeta)(z_0 - z) = (g + \mathfrak{p}_\zeta)\, h$$

und man erkennt, daß p negativ werden kann, wenn $\mathfrak{p}_\zeta$ negativ und dessen Zahlenwert größer als g wird, d. h. für die Möglichkeit des Bestandes relativer Ruhe ist bei beschleunigter, lotrechter Translationsbewegung des Gefäßes notwendig, daß entweder die Bewegung rein nach aufwärts ($\mathfrak{p}_\zeta > 0$) oder aber bei Abwärtsbewegung, mit einer Beschleunigung

$$\mathfrak{p}_\zeta < g + \frac{p_0}{\varrho \cdot h}$$

erfolgt; ist $\mathfrak{p}_\zeta > g + \frac{p_0}{\varrho \cdot h}$, so bleibt die Wassersäule im Gefäß gegen dasselbe zurück und die relative Ruhe wird gestört. Eine Nutzanwendung letzterer Eigenschaft ist in der nebenskizzierten primitiven

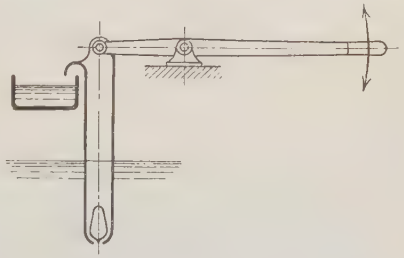

Fig. 11.

[1]) Mit $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ entsprechend lotrechter Lage der ζ- und der Z-Achse.

Einventilpumpe (Fig. 11) zu erblicken, mit welcher Förderung durch rasches Auf- und Abwärtsbewegen des mit einem Bodenventil versehenen und in Flüssigkeit tauchenden Gefäßes erfolgen kann.

b) In allen Fällen gleichförmiger geradliniger Translationsbewegung des Gefäßes.

c) Die Translationsbewegung kann entsprechend Gleichung D auch eine gleichförmig beschleunigte sein.

Die Gleichung läßt sich durch die Annahme paralleler Richtungen zu zwei Achsen der Koordinatensysteme und indem man die Bewegungsrichtung parallel z. B. zur $\xi\zeta$-Ebene legt, reduzieren auf

$$\frac{p}{\varrho} = -\mathfrak{p}_\xi x - (g + \mathfrak{p}_\zeta) z = T,$$

bei $T =$ konstant ergeben sich mit $p =$ konstant die Niveauflächen als Ebenen, die senkrecht zur $\xi\zeta$-Ebene und unter

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\mathfrak{p}_\xi}{g + \mathfrak{p}_\zeta}$$

gegen den Horizont geneigt liegen.

Man erkennt, daß eine Neigung nur vorhanden ist, wenn die horizontale Beschleunigungskomponente $\mathfrak{p}_\xi$ nicht $= 0$ ist; ist dies jedoch der Fall, so kann $\mathfrak{p}_\zeta$ jeden beliebigen Wert annehmen, die Lage der Niveauflächen wird nicht gestört; es liegt also mit $\mathfrak{p}_\xi = 0$ (wobei jedoch $\mathfrak{p}_\zeta > 0$ sein kann) eine Verallgemeinerung des Falles a vor, naturgemäß auch mit der dort bestimmten Begrenzung der Möglichkeit des Bestandes der relativen Ruhe.

Ist die Bewegung eine geradlinige, die Bahn unter dem Winkel β gegen den Horizont geneigt und somit $\frac{\mathfrak{p}_\zeta}{\mathfrak{p}_\xi} = \operatorname{tg} \beta =$ konstant, so folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\mathfrak{p}_\xi}{g + \mathfrak{p}_\xi \operatorname{tg} \beta}$$

und wird, wenn p_ξ bedeutend größer als g, angenähert

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -1,$$

d. h. die Niveauflächen und damit auch die freie Oberfläche stellen sich in diesen Fällen nahezu senkrecht zur Bahnrichtung ein.

Während der Anlaufs- resp. Ablaufsphase der Bewegung eines teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes kann zwar nicht vollkommene relative Ruhe, jedoch bei längerer Dauer dieser Phasen und konstanter Beschleunigung resp. Verzögerung eine derartige Bewegung der Flüssigkeit eintreten, daß die freie Oberfläche periodisch wechselnde Lagen um die der relativen Lage entsprechende freie Oberfläche annimmt.

d) Wird das Gefäß mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine lotrechte Achse gedreht und letztere dabei lotrecht derart bewegt, daß $\mathfrak{p}_\zeta =$ konstant ist, so ist ebenfalls relative Ruhe der Niveauflächen vorhanden, und es kann daher eine freie Oberfläche in relativer Ruhe und hiermit relative Ruhe überhaupt bestehen; die Gleichung D nimmt die Form an:

$$\frac{p}{\varrho} = \omega_z^2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} - (g + \mathfrak{p}_\zeta) z + T.$$

Setzt man $x^2 + y^2 = r^2$, so lautet die Gleichung kürzer

$$\frac{p}{\varrho} = \omega_z^2 \cdot \frac{r^2}{2} - (g + \mathfrak{p}_\zeta) z + T,$$

mit $T =$ konstant und $p =$ konstant ergeben sich die Niveauflächen als Rotationsparaboloide um die Drehachse als geometrische Achse.

Auch hier unterliegt $\mathfrak{p}_\zeta$ der im Fall a namhaft gemachten Beschränkung.

Die Lage der freien Oberfläche im Gefäß ist durch den Flüssigkeitsinhalt bestimmt; z. B. ergibt sich für ein kreiszylindrisches Gefäß Formebene mit der geometrischen Achse als Drehachse das Volumen, das durch Zylinderwand Zylinderwandboden und freie Oberfläche abgegrenzt wird, Fig. 12, mit

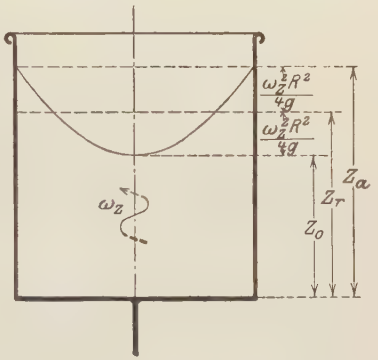

Fig. 12.

$$V = R^2 \pi z_a - R^2 \pi \frac{z_a - z_0}{2} = R^2 \pi \frac{z_a + z_0}{2}.$$

Es ist ferner für $r = 0$ und $z = z_0$: $\frac{p_0}{\varrho} = -g z_0 + T$;

für $r = R$ und $z = z_a$: $\frac{p_0}{\varrho} - \omega_z^2 \cdot \frac{R^2}{2} - g z_a + T$

hiermit: $$z_a - z_0 = \frac{\omega_z^2 R^2}{2g}.$$

Aus der Volumsgleichung und mit $V = z_r R^2 \pi$ folgt:

$$z_a + z_0 = 2 z_r,$$

und hieraus:

$$z_a = z_2 + \frac{\omega_z^2 R^2}{4g}; \qquad z_0 = z_2 + \frac{\omega_z^2 \cdot R^2}{4g},$$

womit die Lage und Formen der freien Oberfläche bestimmt ist; aus den Gleichungen

$$\frac{p}{\varrho} = \omega_z^2 \frac{r^2}{2} - g z + T; \qquad \frac{p_0}{\varrho} = - g z_0 + T$$

erhält man durch Einsetzen des obigen Wertes für z_0 und Subtraktion die Gleichung:

$$\frac{p}{\varrho} - \frac{p_0}{\varrho} + \omega_z^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right) + g (z_0 - z),$$

mittels welcher für jeden Punkt im Innern der Flüssigkeit und an der benetzten Zylinderwandung die Pressung p berechnet werden kann; übrigens ergibt sich aus denselben Gleichungen:

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = (z_0 - z) + \omega_z^2 \cdot \frac{r^2}{2 g},$$

daß die Höhe der Wassersäule, durch die der Überdruck in einem Punkte innerhalb der Flüssigkeit bestimmt wird, gleich ist der über denselben bis zur freien Oberfläche reichenden Flüssigkeitssäule.

Die Abhängigkeit der Höhenlage Flüssigkeitssäulen z_a oder z_e von ω_z läßt sich zur Einrichtung von Zeigerwerken für Umdrehungszähler verwerten.

Mit diesen Fällen ist die Mannigfaltigkeit der Bewegungsarten von offenen Gefäßen erschöpft, bei denen relative Ruhe der in den Gefäßen enthaltenen Flüssigkeiten möglich ist.

III. Relative Ruhe in geschlossenen Gefäßen (ohne freie Oberfläche).

Im Falle eines vollkommen geschlossenen und vollkommen angefüllten Gefäßes wird die Bedingung der relativen Ruhe der Niveauflächen gegenüber dem Gefäße hinfällig; es erscheint daher nach Gleichung D in diesem Fall der Bestand relativer Ruhe der Flüssigkeit möglich, wenn nur die durch die Gleichung D festgelegte Bedingung erfüllt ist, wonach, sofern die Gefäßbewegung eine Rotationskomponente überhaupt besitzt, die Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit zu erfolgen hat; die Parallelverschiebung der Rotationsachse kann hierbei einer beliebigen Translation entsprechen.

Aus Gleichung D ist zu erkennen, daß die Niveauflächen im Falle reiner Translation des Gefäßes Ebenen, in allen anderen Fällen Flächen zweiten Grades sind, deren relative Lage gegen das Gefäß sich im allgemeinen während der Bewegung des Gefäßes

kontinuierlich ändert, d. h. die Niveauflächen bleiben nicht an die Flüssigkeitsteile gebunden wie in den früheren Fällen oder, was dasselbe ist, die Pressung ist in der Flüssigkeit örtlich und zeitlich variabel; es bleibt hierbei jedoch durch die Reaktion der Gefäßwände — sofern dieselben undeformierbar sind — der Bestand der relativen Ruhe gesichert.

Von praktischer Bedeutung ist der Fall der Rotation um eine ruhende horizontale Drehachse. Fig. 13; wählt man die X-Achse als

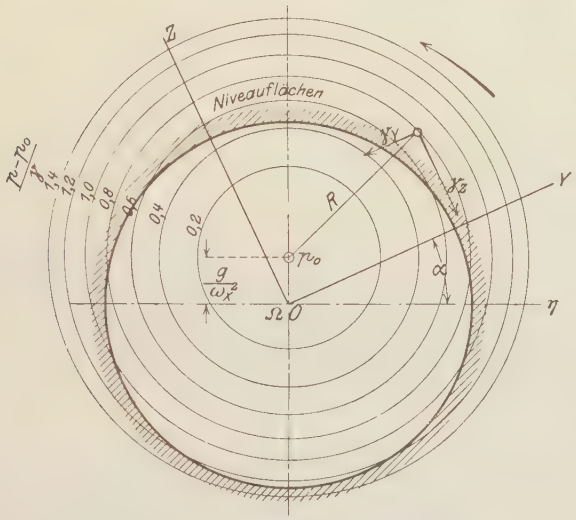

Fig. 13.

Drehachse und läßt dieselbe mit der ξ-Achse des festen Koordinatensystems zusammenfallen, so stellt sich in der $\xi\eta$-Ebene die gegenseitige Lage des Koordinatensystems nach beistehender Skizze dar und es werden

$$\left.\begin{aligned} p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 0 \\ p_x = p_y = p_z = 0 \end{aligned}\right\}$$

und hiermit

$$\gamma_x = 0; \qquad \gamma_y = -g\sin\alpha; \qquad \gamma_z = -g\cos\alpha$$

$$\omega_x = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad \omega_y = 0, \qquad \omega_z = 0$$

und es reduziert sich Gleichung D auf

$$\frac{p}{\varrho} = (-g\sin\alpha)\,y + \omega_y{}^2 \cdot \frac{y^2}{2} + (-g\cos\alpha)\,z + \omega_x{}^2 \cdot \frac{z^2}{2} + T.$$

Auf das feste Koordinatensystem übergehend erhält man

$$y \sin \alpha + z \cos \alpha = \zeta, \qquad y^2 + z^2 = \eta^2 + \zeta^2$$

und hiermit und mit $\varrho = \frac{\gamma}{g}$

$$\frac{p}{\gamma} = \eta^2 \frac{\omega_x^2}{2g} + \zeta^2 \cdot \frac{\omega_x^2}{2g} - \zeta + \frac{T}{g}.$$

T und $p =$ konstant ergeben hieraus die Niveauflächen als koaxiale Kreiszylinderflächen, deren Achse im Abstand $l = \frac{g}{\omega_x^2}$ lotrecht über der ξ-Achse liegt.

Unter der Annahme, daß in dieser Achse der Druck p_0 herrscht, ergibt sich mit $\eta = 0; \quad \zeta = \frac{g}{\omega_x^2} = 1$

$$\frac{p_0}{p} = -\frac{1}{2} \frac{g}{\omega_x^2} + \frac{T}{g}$$

und hieraus durch Subtraktion

$$\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} = \eta^2 \cdot \frac{\omega_x^2}{2g} + \zeta^2 \frac{\omega_x^2}{2g} - \zeta + \frac{1}{2} \frac{g}{\omega_x^2}$$

oder durch Multiplikation mit $\frac{2g}{\omega_x^2}$

$$\frac{2g}{\omega_x^2} \left(\frac{p - p_0}{\gamma} \right) = \eta^2 + \left(\zeta - \frac{g}{\omega_x^2} \right)^2.$$

Hiernach sind die Radien der zylindrischen Niveauflächen durch die Gleichung:

$$R = \sqrt{\frac{2g}{\omega_x^2} \cdot \frac{p - p_0}{\gamma}}$$

bestimmt.

Diese Radien sind hiernach für einen bestimmten Bewegungszustand, also für einen bestimmten Wert von ω_x proportional den Quadratwurzeln aus den Überdrücken.

Die absolute Lage der Niveaulinien ist aus Fig. 13 ersichtlich, aus der man auch erkennt, wie im Falle eines zylindrischen Gehäuses, dessen geometrische Achse in der Achse liegt, bei Drehung desselben um diese Achse der Druck an der Gehäusewandung variiert.

In der Theorie der Zellenwasserräder werden die Niveauflächen in den einzelnen Zellen ebenfalls als koaxiale Kreiszylinderflächen angenommen; die Einführung solcher Niveauflächen ist in diesem

Fall an sich unrichtig, da ja in der Zelle nicht relative Ruhe besteht; bei den geringen Winkelgeschwindigkeiten, die jedoch solche Räder besitzen, führt die Annahme solcher Niveauflächen doch auf praktisch genügend genaue Resultate; z. B. zur Bestimmung derjenigen Zellenlage, bei der Ausfließen beginnt.

In der Studie: „Der Druck auf den Spurzapfen der Reaktionsturbinen und Kreiselpumpen" von Dr. Karl Kobes-Wien, Verlag von Franz Deuticke, Leipzig-Wien, wird die Bestimmung der Pressungen auf die Gefäßwandungen unter Annahme rotierender Flüssigkeitszylinder durchgeführt.

Diese Studie gibt eingehenden Aufschluß über die Art und Weise, wie Probleme solcher Art zu lösen sind; eine weitere Bearbeitung erscheint daher überflüssig.

Es soll im folgenden nur noch an einem einfachen Beispiel das Problem des Gleichgewichtszustandes eines Körpers, der in eine in relativer Ruhe befindliche Flüssigkeit eingetaucht ist, behandelt werden.

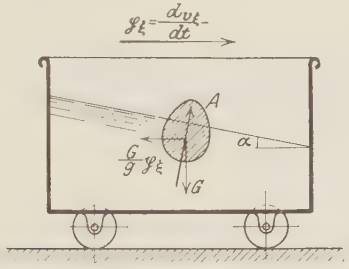

Fig. 14.

Ein offenes Gefäß sei auf horizontaler Bahn in gleichmäßig beschleunigter Bewegung. Fig. 14.

Nach Fall C, S. 46 u. f., ist relative Ruhe einer im Gefäß enthaltenen Flüssigkeit möglich; die Druckgleichung wird mit $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ und

$$\mathfrak{p}_\zeta = 0 \qquad \text{und} \qquad T = \text{konstant}$$

$$\frac{p}{\gamma} = -\frac{\mathfrak{p}_\xi}{g} x - z + T,$$

die Niveauebenen sind unter dem Winkel $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\mathfrak{p}_x}{g}$ gegen den Horizont geneigt.

In die Flüssigkeit sei ein homogener zylindrischer Körper eingetaucht, dessen Querprofil eine Symmetrieachse besitzt und zwar vorerst in einer solchen Lage, daß die Richtung der Zylindererzeugenden senkrecht zur $\xi\zeta$- resp. XZ-Ebene und die Symmetrieachse des Profils senkrecht zu den Niveauebenen steht.

Der Körper sei gegen das Gefäß ebenfalls in relativer Ruhe; es ist zu bestimmen, unter welchen Umständen dieselbe bestehen kann.

Auf den Körper wirken 1. die Schwerkraft in der Größe gleich dem Gewichte G des Körpers angreifend im Schwerpunkte lotrecht nach abwärts. 2. Die erste Ergänzungskraft der Relativbewegung, d. i. $\frac{G}{g}\mathfrak{p}_\xi$ horizontal, entgegengesetzt der Bewegungsrichtung und angreifend im Schwerpunkt des Körpers. 3. Der Auftrieb A bei der angenommenen Lage des Körpers in Richtung der Symmetrieachse vom Innern der Flüssigkeit gegen die freie Oberfläche, der Auftrieb geht hiermit ebenfalls durch den Schwerpunkt, für den Bestand des Gleichgewichtes ist daher nur nötig, daß die Größe von A die Resultierenden von G und E, also

$$A = G\sqrt{1+\left(\frac{\mathfrak{p}_\xi}{g}\right)^2}$$

ist.

Mit $\mathfrak{p}_\xi = 0$, also bei Ruhe oder einfach gleichförmiger Bewegung des Gefäßes (v_ξ konstant) wird $A = G$, woraus man erkennt, daß der Auftrieb bei gleichförmig beschleunigter Bewegung des Gefäßes für den Gleichgewichtszustand des Körpers, also durch die Tauchtiefe desselben größer sein muß als bei Ruhe des Gefäßes; Gleichgewicht ist ferner in jeder Lage möglich, bei der die Erzeugenden des Zylinders parallel zu den Niveauebenen, die Symmetrieebene senkrecht zu denselben stehen, da hierbei G, E und A doch immer zum Schnitt kommen und in derselben Ebene bleiben; wird die Lage des Körpers durch eine kleine Parallelverschiebung in der Richtung A gestört, so ändern sich A und E im gleichen Verhältnisse, deren Resultierende bleibt in der Richtung von A, es tritt schwingende Bewegung in dieser Richtung ein; eine Ablenkung im Sinne einer Drehung um eine in der Symmetrieebene und parallel zu den Erzeugenden liegende Achse bringt eine schaukelnde Bewegung hervor, wenn die hierdurch verursachte Verschiebung der Lage des Auftriebes mit der Resultierenden von G und G ein aufrichtendes Moment ergibt, im andern Fall erfolgt Kippen. In weiterer Verfolgung solcher Störungen erkennt man, daß qualitativ das Verhalten eines solchen Körpers demjenigen im ruhenden Wasser analog ist. Der wesentliche Unterschied besteht lediglich in der für den Gleichgewichtszustand nötigen größeren Tauchtiefe.

Es mag zum Schluß noch hervorgehoben sein, daß allen den ermittelten Bedingungen für die Möglichkeit des Bestandes relativer Ruhe die Hauptbedingung vorausgeht, daß die Herbeiführung eines solchen Zustandes überhaupt möglich ist; bei dem Umstand, daß die Überführung eines Körpersystems aus dem Ruhezustand in einen anderen Bewegungszustand nur durch beschleunigende Kräfte möglich ist, erscheint die unmittelbare Überführung aus der absoluten in die relative Ruhe nur in geschlossenen Gefäßen bei reiner Translationsbewegung derselben möglich, eine Drehbewegung darf hierbei nicht auftreten, da auch bei geschlossenen Gefäßen die Bedingung konstanter Winkelbeschleunigung besteht, in welchen Zustand man aus der Ruhe doch erst durch Beschleunigung gelangen kann.

Den im letzten Beispiel angeführten Zustand der relativen Ruhe bei gleichförmig beschleunigter, geradliniger Bewegung auf horizontaler Bahn kann man sich z. B. dadurch erzeugt denken, daß man

das Gefäß mit einem ebenen Deckel versieht, der mit der Neigung der Niveauebenen aufgebracht ist, das Gefäß mit Flüssigkeit füllt, in Bewegung setzt und dann, wenn der gleichförmig beschleunigte Bewegungszustand eingetreten ist, den Deckel abhebt.

Im offenen Gefäß ist die unmittelbare Herstellung der geneigten Oberfläche nicht möglich; sie wird sich aber bei genügend langer Dauer der Bewegung einstellen, wenn die beim Anfahren verursachte relative periodische Bewegung der Flüssigkeit durch die Reibungswiderstände bis zur relativen Ruhe abgedämpft wird.

Diese relative Übergangsbewegung wird jedoch unter allen Umständen von der Form des Gefäßes beeinflußt.

Im allgemeinen wird hiernach selbst bei Erfüllung der oben entwickelten Bedingungen für den nötigen Bewegungszustand des Gefäßes relative Ruhe nur dann eintreten, wenn die Reibungswiderstände die Überführung in diesen Zustand ermöglichen und die Form des Gefäßes dieser Überführung nicht hinderlich ist.

III. Hydrodynamik.

1. Stationäre Strömungen in feststehenden Räumen.

Die Hydrodynamik untersucht die Erscheinungen in bewegten Flüssigkeiten mit Hilfe der im ersten Kapitel sub B angegebenen Grundgleichungen.

Die Probleme selbst sind teils geometrischer teils mechanischer Natur, indem dieselben einerseits die Bestimmung der Strömungsformen, anderseits die Bestimmung der denselben entsprechenden Geschwindigkeits- und Pressungsverteilungen und der hiermit verbundenen Energieumsätze zum Zwecke haben.

A. Geometrie der stationären Strömungen.

Es entspricht durchaus der natürlichen Vorstellung, sich in erster Linie die stationäre Strömung in einem z. B. kanalförmig abgegrenzten feststehenden Raum durch nebeneinander liegende, sich nirgends schneidende und im allgemeinen krumme Linien als Bahnen von Flüssigkeitselementen anschaulich zu machen; die Kanalbegrenzung umschließt dann dieses Linienbüschel; finden hierbei innerhalb der Flüssigkeitselemente keine sekundären Bewegungen der einzelnen Teilchen derselben statt, so hat man es mit geordneten Strömungen zu tun, wie solche bei reibungsfreien, reinen Flüssigkeiten oder auch unter dem Einfluß der inneren Reibung allein vorkommen können; die Gesamtheit der krummen Linien stellt dann die wirklichen Bahnen der einzelnen Flüchtigkeitsteilchen dar; bei Vorhandensein von sekundären Bewegungen, mit denen auch ein Austausch von Flüssigkeitsteilchen zwischen den einzelnen Flüssigkeitselementen verbunden sein kann, also bei turbulenter Strömung, charakterisieren die krummen Linien unseres geometrischen Strömungsbildes die Hauptströmung.

Zu einem solchen Linienbüschel kann man sich nun eine erste Schar von Flächen vorstellen, die die Linien überall rechtwinklig durchschneiden; es wird hierdurch der mit Flüssigkeit erfüllte Raum bereits in bestimmter Weise unterteilt, diese Flächen haben die Eigenschaft von Querschnittsflächen der Strömung. Fig. 15.

Denkt man sich weiter auf irgendeiner dieser Flächen zwei Scharen von Linien derart gezogen, daß die Linien der einen Schar diejenigen der anderen Schar schneiden, so werden durch diese beiden Linienscharen und die durch deren Punkte hindurchgehenden Bahnlinien eine zweite und eine dritte Flächenschar gebildet, die den Raum weiter unterteilen. Die einzelnen Flächen dieser beiden Scharen haben die Eigenschaft von Stromflächen. Die letzteren Flächenscharen liegen gegen die erste Flächenschar rechtwinklig, untereinander im allgemeinen schiefwinklig; dieselben bilden zusammen ein System im allgemeinen zweifach orthogonaler Flächenscharen, in speziellen Fällen könnnen auch die Flächen der beiden letzten Scharen rechtwinklig gegeneinander liegen, sie bilden dann mit der ersten Schar ein System dreifach orthogonaler Flächenscharen.

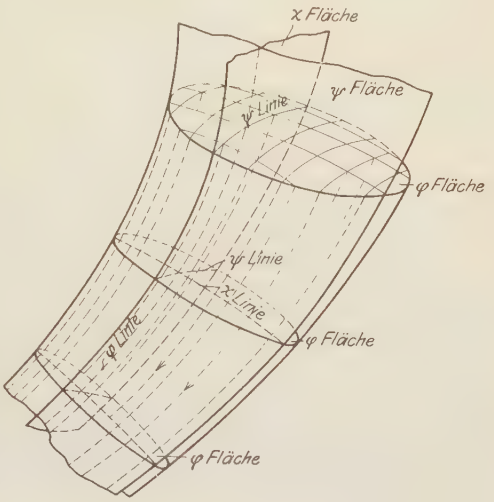

Fig. 15.

Ein durch die Schnittlinien eines derartigen Flächensystems gebildetes Liniennetz stellt ein im allgemeinen krummliniges und zweifach orthogonales Koordinatensystem dar.

Es seien nun die Flächen der ersten, zweiten und dritten Schar als φ-, ψ- resp. χ-Flächen; die Schnittlinien der ψ- und χ-Flächen, das sind die Bahnlinien als φ-Linien; die Schnittlinien der φ- und χ-Flächen als ψ-Linien, diejenigen der φ- und ψ-Flächen als χ-Linien bezeichnet und vorläufig auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen, indem mit φ, ψ und χ außerdem drei verschiedene, jedoch koordinierte Funktionen von x, y, z bezeichnet werden, durch die die drei Flächenscharen analytisch beschrieben sind:

Es sollen hierbei x, y, z die Verhältnisse der Koordinatenlängen zu einer willkürlichen Längeneinheit bedeuten, so daß also x, y, z Verhältniszahlen und die Funktionswerte φ, ψ χ und deren Ableitungen ebenfalls reine Zahlen sind.

Die Funktionen φ, ψ, χ werden als Formfunktionen bezeichnet.

Für die drei Funktionen gelten hiernach die drei totalen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz \\ d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz \\ d\chi &= \frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy + \frac{\partial\chi}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{I}$$

oder wenn man die partiellen Differentialquotienten der Kürze halber mit

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}$$

bezeichnet.

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz \\ d\psi &= \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz \\ d\chi &= \gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{I}'$$

Zwischen den einzelnen Differentialquotienten bestehen folgende Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\cdot\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial\alpha_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial y}; \quad \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial z} \\ &\frac{\partial\beta_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial\beta_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial\beta_2}{\partial z} = \frac{\partial\beta_3}{\partial y}; \quad \frac{\partial\beta_3}{\partial x} = \frac{\partial\beta_1}{\partial z} \\ &\frac{\partial\gamma_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial x}; \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial z} = \frac{\partial\gamma_3}{\partial y}; \quad \frac{\partial\gamma_3}{\partial x} = \frac{\partial\gamma_1}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

Wegen der Orthogonalität der ψ- und χ-Flächen gegen die φ-Flächen hat man:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{III}_a$$

wogegen mit den abgekürzten Bezeichnungen

$$A = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$
$$B = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$$
$$C = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$$

und mit ω als Winkel der Normalen im Punkte x, y, z zu den Flächen ψ und χ folgt:

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = \sqrt{BC}\cos\omega^{1}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}_b$$

Die beiden Gleichungen III_a werden erfüllt, wenn

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)\,\nu \\ \alpha_2 &= (\beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1)\,\nu \\ \alpha_3 &= (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\,\nu \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV}$$

worin ν eine vorläufig beliebige Funktion von x, y, z bedeutet; man erhält hieraus:

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)\frac{\partial\nu}{\partial x} + \nu\left(\beta_2\frac{\partial\gamma_3}{\partial x} + \gamma_3\frac{\partial\beta_2}{\partial x} - \beta_3\frac{\partial\gamma_2}{\partial x} - \gamma_2\frac{\partial\beta_3}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = (\beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1)\frac{\partial\nu}{\partial y} + \nu\left(\beta_3\frac{\partial\gamma_1}{\partial y} + \gamma_1\frac{\partial\beta_3}{\partial y} - \beta_1\frac{\partial\gamma_3}{\partial y} - \gamma_3\frac{\partial\beta_1}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial\alpha_3}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)\frac{\partial\nu}{\partial z} + \nu\left(\beta_1\frac{\partial\gamma_2}{\partial z} + \gamma_2\frac{\partial\beta_1}{\partial z} - \beta_2\frac{\partial\gamma_1}{\partial z} - \gamma_1\frac{\partial\beta_2}{\partial z}\right)$$

und weiter durch Addition und Berücksichtigung der Identitäten II und der Gleichungen IV

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial z}\right). \quad \text{V}_a$$

als allgemeine Differentialgleichung der Funktion φ.

Führt man die den Identitäten

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial z} = \frac{\partial\alpha_3}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} = \frac{\partial\alpha_1}{\partial z}; \qquad \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} = \frac{\partial\alpha_2}{\partial x}$$

entsprechenden partiellen Differentialquotienten an den Gleichungen IV aus, so erhält man mit den Bezeichnungen

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}; \qquad \nabla^2\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}$$

[1]) Sind die ψ- und χ-Flächen ebenfalls durchaus orthogonal, so wird $\cos\omega = 0$ und die rechte Seite von III_b wird gleich Null.

folgende drei Gleichungen

$$\frac{\alpha_2}{\nu^2}\frac{\partial \nu}{\partial z} - \left(\gamma_1\frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \gamma_2\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + \gamma_3\frac{\partial \beta_1}{\partial z}\right) + \gamma_1\nabla^2\psi = \frac{\alpha_3}{\nu^2}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial y}$$

$$\left(\beta_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) + \beta_1\nabla^2\chi$$

$$\frac{\alpha_3}{\nu^2}\frac{\partial \nu}{\partial z} - \left(\gamma_1\frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \gamma_2\frac{\partial \beta_2}{\partial y} + \gamma_3\frac{\partial \beta_2}{\partial z}\right) + \gamma_2\nabla^2\psi = \frac{\alpha_1}{\nu^2}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial z}$$

$$\left(\beta_1\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial \gamma_2}{\partial z}\right) + \beta_2\nabla^2\chi$$

$$\frac{\alpha_1}{\nu^2}\frac{\partial \nu}{\partial y} - \left(\gamma_1\frac{\partial \beta_3}{\partial x} + \gamma_2\frac{\partial \beta_3}{\partial y} + \gamma_3\frac{\partial \beta_3}{\partial z}\right) + \gamma_3\nabla^2\psi = \frac{\alpha_2}{\nu^2}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial x}$$

$$\left(\beta_1\frac{\partial \gamma_3}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_3}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial \gamma_2}{\partial z}\right) + \beta_3\nabla^2\chi$$

Die drei Gleichungen können mit Hilfe der Gleichung III_b umgeformt werden; differenziert man die letztere z. B. partiell nach x, so erhält man

$$\gamma_1\frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \gamma_2\frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \gamma_3\frac{\partial \beta_3}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right) = \left(\beta_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \beta_3\frac{\partial \gamma_3}{\partial x}\right)$$

und unter Berücksichtigung der Identitäten II

$$\gamma_1\frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \gamma_2\frac{\partial \beta_1}{\partial y} + \gamma_3\frac{\partial \beta_1}{\partial z} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right) = \left(\beta_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \beta_3\frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right)$$

und ähnliches folgt durch partielle Differentiation nach y und z; man erhält nach entsprechender Ordnung die neuen Formen:

$$\gamma_1\nabla^2\psi - \beta_1\nabla^2\chi = + \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right)$$

$$- 2\left(\beta_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right) + \frac{1}{\nu^2}\left(\alpha_3\frac{\partial \nu}{\partial y} - \alpha_2\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)$$

$$\gamma_2\nabla^2\psi - \beta_2\nabla^2\chi = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right)$$

$$- 2\left(\beta_1\frac{\partial \gamma_2}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial \gamma_2}{\partial z}\right) + \frac{1}{\nu^2}\left(\alpha_1\frac{\partial \nu}{z} - \alpha_3\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)$$

$$\gamma_3\nabla^2\psi - \beta_2\nabla^2\chi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right)$$

$$- 2\left(\beta_1\frac{\partial \gamma_3}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial \gamma_3}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial \gamma_3}{\partial z}\right) + \frac{1}{\nu^2}\left(\alpha_2\frac{\partial \nu}{\partial x} - \alpha_1\frac{\partial \nu}{\partial y}\right).$$

Multipliziert man nun der Reihe nach mit γ_1, γ_2, γ_3 und berücksichtigt, daß $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = C$, $2\gamma_1\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} = \frac{\partial (\gamma_1)^2}{\partial x}$ usw., so ergibt sich die Gleichung:

$$C\nabla^2\psi - \left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right)\nabla^2\chi = \gamma_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right)$$

$$+ \gamma_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right) + \gamma_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{B\,C}\cos\omega\right)$$

$$+ \frac{1}{\nu^2}\left[(\gamma_3\alpha_2 - \gamma_2\alpha_3)\frac{\partial \nu}{\partial x} + (\gamma_1\alpha_3 - \gamma_3\alpha_1)\frac{\partial \nu}{\partial y} + (\gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2)\frac{\partial \nu}{\partial z}\right]$$

$$- \left(\beta_1\frac{\partial C}{\partial x} + \beta_2\frac{\partial C}{\partial y} + \beta_3\frac{\partial C}{\partial z}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{V}_b$$

Setzt man hierin die Werte von α_1, α_2, α_3 aus den Gleichungen IV ein, so gibt V_b eine Differentialgleichung zwischen den Funktionen ψ, χ und ν und kann dieselbe zur Bestimmung der Funktionsformen von ψ dienen, wenn diejenigen von χ und ν gegeben sind.

Die Gleichung vereinfacht sich bereits für den Fall $\nu =$ konstant, indem die Glieder mit ν in Wegfall kommen; wird außerdem $\omega = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, d. h. das Flächensystem ein dreifach orthogonales, so ergibt sich die einfache Form

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{C}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial C}{\partial z}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V_b^*$$

Aus den Gleichungen I′ ergeben sich für die Bestimmung der Werte von dx, dy, dz mit der Determinante:

$$D = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \alpha_2(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)$$
$$= \frac{1}{\nu}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) = \frac{1}{\nu}\cdot A$$

die Gleichungen:

$$\frac{1}{\nu}\cdot A\,dx = d\varphi(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \alpha_2(\beta_3\,d\chi + \gamma_3\,d\psi) + \alpha_3(\gamma_2\,d\psi - \beta_2\,d\chi)$$

$$\frac{1}{\nu}\cdot A\,dx = \frac{\alpha_1}{\nu}\,d\varphi + (\alpha_3\gamma_2 - \gamma_3\alpha_2)\,d\psi + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,d\chi$$

und ebenso

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\nu}\cdot A\,dy &= \frac{\alpha_2}{\nu}\,d\varphi + (\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1)\,d\psi + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,d\chi\\ \frac{1}{\nu}\cdot A\,dz &= \frac{\alpha_3}{\nu}\,d\varphi + (\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2)\,d\psi + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\,d\chi\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad VI$$

dx. dy. dz bedeuten in diesen Gleichungen die elementaren Koordinatendifferenzen zweier beliebiger benachbarter Raumpunkte und sind deren Werte bestimmt durch ν und durch die Werte der partiellen Differentialquotienten der Flächenfunktionen im Punkte x, y, z und die Differenz $d\varphi$, $d\psi$ und $d\chi$, um die sich die Funktionswerte ändern beim Übergang vom Punkt x, y, z zum Punkte $(x + dx)$. $(y + dy)$, $(z + dz)$.

Beachtet man nun, daß beim Übergang von x, y, z zu einem benachbarten Punkt längs einer φ-Linie die Flächen ψ und χ, auf denen x, y, z liegt, nicht verlassen, also hierbei $d\psi = 0$ und $d\chi = 0$ und ähnlich für die Übergänge auf einer ψ- resp. χ-Linie $d\varphi = 0$, $d\chi = 0$ resp. $d\varphi = 0$, $d\psi = 0$ zu setzen sind, so erhält man für die Werte der Projektionen der elementaren Längen der φ-, ψ- und χ-Linien folgendes Schema:

	φ-Linie $d\psi = 0 \quad d\chi = 0$	ψ-Linie $d\varphi = 0 \quad d\chi = 0$	χ-Linie $d\varphi = 0 \quad d\psi = 0$
dx	$\frac{\alpha_1}{A} \cdot d\varphi$	$\nu \frac{\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3}{A} \cdot d\psi$	$\nu \frac{\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2}{A} \cdot d\chi$
dy	$\frac{\alpha_2}{A} \cdot d\varphi$	$\nu \frac{\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1}{A} \cdot d\psi$	$\nu \frac{\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3}{A} \cdot d\chi$
dz	$\frac{\alpha_3}{A} \cdot d\varphi$	$\nu \frac{\alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2}{A} \cdot d\psi$	$\nu \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{A} \cdot d\chi$

VII

Hieraus erhält man entsprechend der allgemeinen Beziehung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ nach entsprechenden Umformungen folgende Werte für die Linienelemente ds_φ, ds_ψ, ds_χ der φ-, ψ- und χ-Linien:

$$\left.\begin{aligned} ds_\varphi &= \sqrt{\frac{1}{A}}\, d\varphi \\ ds_\psi &= \nu \sqrt{\frac{C}{A}}\, d\psi \\ ds_\chi &= \nu \sqrt{\frac{B}{A}}\, d\chi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{VIII}$$

hiervon steht ds_φ senkrecht auf ds_ψ und ds_χ, während ds_ψ und ds_φ im allgemeinen unter dem örtlich verschiedenen Winkel ω geneigt sind.

Durch Quadrieren der Gleichung III_b ergibt sich unter Benützung der Gleichungen IV die Beziehung

$$A = \nu^2 B \cdot C \sin^2 \omega \quad \ldots\ldots\ldots \text{IX}$$

und hiermit der Flächeninhalt des die Seiten ds_ψ und ds_χ enthaltenden elementaren Viereckes

$$\left.\begin{aligned} df &= ds_\psi\, ds_\chi \cdot \sin\omega = \nu^2 \sqrt{\frac{BC}{A}} \sin\omega\, d\psi\, d\chi \\ df &= \frac{\nu}{\sqrt{A}}\, d\psi\, d\chi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{X}$$

Der Rauminhalt des elementaren Zwölfkantes mit den Seitenlängen ds_φ, ds_ψ und ds_χ ergibt sich zu

$$d\tau = df \cdot ds_\varphi = \frac{\nu}{A}\, d\varphi \cdot d\psi \cdot d\chi \quad \ldots\ldots \text{XI}$$

Denkt man sich nun die Flächen aller drei Flächenscharen derart gruppiert, daß die Differenzen der aufeinanderfolgenden Funktionswerte nicht nur innerhalb

der einzelnen Scharen, sondern überhaupt durchaus gleich werden und gibt man dieser Differenz den endlichen (aber sehr kleinen) Wert $\Delta\varepsilon$, so daß $\Delta\varphi = \Delta\psi = \Delta\chi = \Delta\varepsilon$ wird, so erhält man folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = \nu\sqrt{C} \\ &\frac{\Delta s_\chi}{\Delta s_\varphi} = \nu\sqrt{B} \quad \text{oder} \quad \Delta s_\varphi : \Delta s_\psi : \Delta s_\chi = 1 : \nu\sqrt{C} : \nu\sqrt{B} \\ &\frac{\Delta s_\chi}{\Delta s_\psi} = \sqrt{\frac{B}{C}} \end{aligned}\right\} \quad \text{XII}$$

$$\Delta f = \frac{\nu}{\sqrt{A}}\Delta\varepsilon^2 \quad \text{XIII}$$

$$\Delta\tau = \frac{\nu}{A}\Delta\varepsilon^3 \quad \text{XIV}$$

Das wesentliche Resultat dieser Untersuchung ist folgendes:

Durch die drei Flächenscharen φ, ψ und χ wird der Raum im allgemeinen in elementare Zwölfkante unterteilt, mit örtlich bestimmten Verhältnissen der mittleren Seitenlängen, wenn die Aufeinanderfolge der Flächen der einzelnen Scharen derart genommen wird, daß die Funktionswerte der aufeinanderfolgenden Flächen um denselben Betrag differieren.

Diese Eigenschaft bildet die Grundlage für die graphische Netzkonstruktion.

Graphische Konstruktion von Netzlinien.

Die auf einer χ-Fläche befindlichen φ- und ψ-Linien bilden ein Netz von orthogonalen Trajektorien, das die Fläche in elementare, im allgemeinen krummlinige Rechtecke unterteilt; aus der ersten der Gleichungen XII folgt das Verhältnis der mittleren Seitenlängen eines Rechteckes, Fig. 16

$$\frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = \nu\sqrt{C};$$

durch denselben Wert ist die Neigung der Diagonalen der Rechtecke

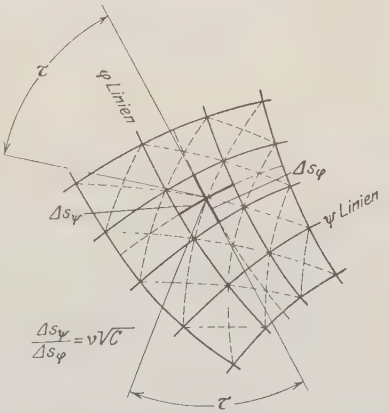

Fig. 16.

gegen die durch deren Schnittpunkte gehenden Bahnlinien bestimmt, indem

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = \nu\sqrt{C}$$

ist. Sind für jeden Punkt der Fläche die Werte der Funktionen C und ν und damit von $\nu\sqrt{C}$ bekannt, so ergibt sich folgende Grundaufgabe für die graphische Bestimmung solcher Netze:

Auf einer Fläche der Schar χ ist eine φ-(Bahn-)Linie mit der, einer konstanten Wertdifferenz $\Delta\varphi = \Delta\varepsilon$ entsprechenden Punkteinteilung 0, 1, 2, 3 ... und außerdem für jeden Punkt der Wert von ν bekannt, es ist das auf dieser Fläche liegende Netz der φ- und ψ-Linien zu zeichnen.

Die Funktion C ist durch die Gleichung $C = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2$ bestimmt, es muß also für die Flächenschar χ die Funktionsgleichung gegeben oder der Wert von C sonst in irgendeiner Weise bestimmbar sein.

Denkt man sich diejenigen Punkte der Fläche zu Linien verbunden, in denen der Wert von $\nu\sqrt{C}$ konstant ist, so erhält man eine Darstellung der Verteilung dieses Wertes auf der Fläche; diese Linien können auch als Linien gleicher Diagonalenneigung bezeichnet werden.

Zieht man nun durch die einzelnen Teilpunkte der gegebenen Bahnlinie die Diagonalenelemente unter Rücksichtigung der Gleichung $\operatorname{tg}\tau = \nu\sqrt{C}$, so ergeben deren Schnittpunkte neue Bahnlinien mit Teilpunkten, von denen aus die Konstruktion fortgesetzt werden kann; man erkennt, daß sich außer den Bahnlinien auch die ψ-Linien, sowie die Diagonalenlinien einzeichnen lassen. Siehe auch Fig. 20, Seite 75, Fig. 23 Seite 83.

Da das Verfahren auf Eigenschaften der Flächen aufgebaut ist, die nur deren Elementen zukommen, so wird im Prinzip dasselbe um so genauer sein, je kleiner die Entfernung der Teilpunkte auf der Ausgangslinie ist; werden bei fortgesetzter Aneinanderreihung der Rechtecke die Längen Δs_ψ und Δs_φ größer, so sind Unterteilungen anzuwenden, was aber an sich keine Schwierigkeiten bietet.

Das Verfahren ist direkt anwendbar, wenn die χ-Flächen Ebenen sind; ist dies nicht der Fall, so ermöglicht das Hilfsmittel der konformen Abbildungen die Netzzeichnung in einer Ebene.

Bezüglich der allgemeinen Theorie der konformen Abbildungen wird auf die entsprechende Literatur und namentlich auf die Originalschrift von Gauß verwiesen, die im Jahre 1825 im 3. Heft von Schuhmachers astronomischen Abhandlungen als Lösung einer

Preisaufgabe unter dem Titel erschienen ist: „Allgemeine Lösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich ist."

Die für den Gebrauch zur graphischen Netzbestimmung wesentlichste Eigenschaft dieses Hilfsmittels kann folgendermaßen gekennzeichnet werden:

Alle Netze orthogonaler Trajektorien, auf beliebigen Flächen, die derart beschaffen sind, daß durch dieselben die Flächen in krummlinige Rechtecke unterteilt werden, deren Diagonalen wieder unter sich orthogonale Trajektorien bilden und somit gegen die Linien der ursprünglichen Netze in jedem Punkte unter 45^0 geneigt sind, besitzen die Eigenschaft, daß Figuren in denselben, deren Linien die Netzlinien in gleicher Reihenfolge treffen und hierbei die korrespondierenden Netzlinienelemente je im gleichen Verhältnis teilen, in ihren kleinsten Teilen ähnlich, d. h. konforme Abbildungen sind. Derartige Netze kann man als Grundnetze der konformen Abbildungen bezeichnen. Jedem Punkt einer Figur in einem solchen Netze entspricht ein bestimmter Punkt der konformen Figur in einem anderen Grundnetze; alle durch zwei derart zugeordnete Punkte gezogenen korrespondierenden, d. h. gegen die Netzlinien je gleich geneigten Linienelemente der beiden Figuren haben gleiches Längenverhältnis; dessen Wert ist jedoch im allgemeinen für verschiedene Punktpaare verschieden.

Sind Figuren in verschiedenen Grundnetzen einer Figur in einem weiteren solchen Netz konform, so sind dieselben auch untereinander konform.

Die Konstruktion der Grundnetze ist analog derjenigen, die früher für allgemeinere Netze angegeben wurde; es wird hierbei nur $\operatorname{tg} \tau = \nu \sqrt{C} =$ konstant $= 1$ (also nicht wie im allgemeinen Fall von Punkt zu Punkt verschieden). Das einfachste Grundnetz der konformen Abbildungen ist das ebene rechtwinklige Koordinatennetz mit durchweg gleichen Abständen der Netzlinien; es gibt jedoch unendlich viele andere Formen ebener Grundnetze, wie sich an Beispielen ergeben wird; man wird jeweilen dasjenige Netz wählen, das die leichteste Figurenübertragung ergibt.

Die angeführte Grundeigenschaft der konformen Netze ermöglicht die Einzeichnung solcher Netze in Modelle von krummen Flächen mittels biegsamer 45^0 Winkellineale.

Die Ausbildung entsprechender Methoden zur Konstruktion konformer Grundnetze in beliebigen Flächen bei projektivischer Darstellung der Flächen bildet ein Problem der darstellenden Geometrie, dessen Lösung zweckdienlich für die Netzdarstellung wäre.

Sind nun auf einer χ-Fläche die Linien konstanter Diagonalenneigung gegeben und hat man sich auf derselben ein Grundnetz gezeichnet, so kann man diese Linien in ein ebenes Grundnetz übertragen und mit Hilfe derselben ein ihnen entsprechendes konformes Netz von φ und ψ-Linien zeichnen, das nun wieder in das Grundnetz auf der χ-Fläche übertragen werden kann; die Eigenschaft der Konformität sichert die geforderte Einhaltung der Flächenunterteilung in krummlinige Rechtecke mit dem Seitenverhältnis

$$\frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = \nu \sqrt{C}.$$

Das konstruierte und das übertragene Netz sind ebenfalls konform und hiermit jedes zwischen denselben in früher geschilderter Weise übertragene Figurenpaar; es ergibt sich hierin eine Verallgemeinerung der Darstellung konformer Netze.

Analoges gilt natürlich für die Darstellung der Netzlinien auf einer der ψ- oder der φ-Flächen zweiten resp. der dritten Gleichungen XII.

Theorie der Krümmung ebener orthogonaler Trajektorien.

Die Genauigkeit der Konstruktion ebener Netze läßt sich wesentlich erhöhen, wenn man die Krümmungsradien der Netzlinien bestimmt und dieselben zur Einzeichnung elementarer Bogenstücke benützt.

Für deren Bestimmung kann folgende Theorie der Krümmung ebener orthogonaler Trajektorien dienen, in der, um allgemeiner zu bleiben, die Bezeichnungen ξ und η für die Koordinaten des ebenen kartesischen Koordinatennetzes gewählt und andere Buchstaben als bisher für die Funktionsbezeichnungen eingeführt sind; es wird dann in jedem Fall leicht sein, durch entsprechende Rückführung auf die alten Bezeichnungen die allgemeine Form der Gleichungen zu spezialisieren.

Sind U und V zwei Funktionen von ξ und η, so werden durch dieselben zwei Scharen orthogonaler ebener Trajektorien dargestellt, wenn zwischen den partiellen Ableitungen der Funktionen und einer vorläufig noch beliebigen Funktion μ von ξ und η die Beziehungen bestehen:

$$\mu \frac{\partial U}{\partial \xi} = + \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_1$$

$$\mu \frac{\partial U}{\partial \eta} = - \frac{\partial V}{\partial \xi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_2$$

da hierbei die Bedingung der Orthogonalität erfüllt ist, indem

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} : \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} : \frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = -1$$

wird.

Durch die partielle Differentiation von a_1 nach ξ, von a_2 nach η ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial \eta \, \partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \, \partial \eta}$$

und hieraus

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad b_1$$

und nach Division der Gleichungen a_1 und a_2 durch μ und partielle Differentiation von $\frac{a_1}{\mu}$ nach η, von $\frac{a_2}{\mu}$ nach ξ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b_2$$

Es sind hiermit ganz allgemein die simultanen Gleichungen a_1 und a_2 oder b_1 und b_2, die partiellen Differentialgleichungen zweier orthogonaler ebener Kurvenscharen.

Durch die Wahl von μ werden diese Kurvenscharen in Kategorien abgetrennt, man kann μ die Kategorien-Funktion nennen; z. B. mit $\mu =$ konst. nehmen b_1 und b_2 die Formen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0$$

an; d. h. die Gleichungen der ebenen konformen Grundnetze.

Unter Bezugnahme auf umstehende Fig. 17, in der $a\,b$ eine Linie der V-Schar, $c\,d$ eine solche der U-Schar sind, seien weiter folgende Bezeichnungen eingeführt:

α, β = Bogen der Tangentenwinkel
$d\xi_\alpha$, $d\xi_\beta$ = Abszissen
$d\eta_\alpha$, $d\eta_\beta$ = Ordinaten
ds_α, ds_β = Bogen
} Elemente
ϱ_α, ϱ_β = Krümmungsradien

} der beiden Linien $c\,d$ und $a\,b$, die sich im Punkte ξ, η orthogonal schneiden

Ferner sei eingeführt

$$M^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2\right] \frac{1}{\mu^2}.$$

Da nun

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \xi}}{\frac{\partial U}{\partial \eta}}; \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{\frac{\partial V}{\partial \xi}}{\frac{\partial V}{\partial \eta}}$$

sind. ergeben sich die Beziehungen:

$$\sin^2\alpha = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2}{M^2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2}{M^2}$$

$$\sin^2\beta = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2}{\mu^2 M^2}; \qquad \cos^2\beta = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2}{\mu^2 M^2},$$

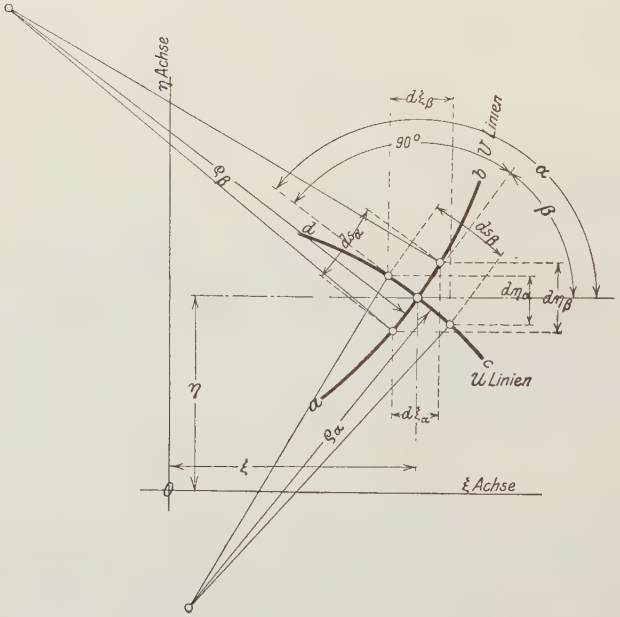

Fig. 17.

und wegen $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ die Identitäten

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{\mu M}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) = \frac{d\eta_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{d\xi_\beta}{ds_\beta}$$

$$\cos\alpha = -\sin\beta = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = +\frac{1}{\mu M}\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) = +\frac{d\xi_\alpha}{ds_\alpha} = -\frac{d\eta_\beta}{ds_\beta}$$

hiermit werden

$$\frac{dU}{ds_\beta} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\beta}{ds_\beta} + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{d\eta_\beta}{ds_\beta} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right] = M \quad \ldots \quad c_1$$

$$\frac{dV}{ds_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\alpha}{ds_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2\right] = M \quad \ldots \quad c_2$$

und daraus

$$\frac{dU}{ds_\beta} = \frac{1}{\mu}\frac{dV}{ds_\alpha} \quad \ldots \quad d_1$$

oder

$$\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = \frac{1}{\mu}\frac{dV}{dU} \quad \ldots \quad d_2$$

Für die Bestimmung der Krümmungsradien dienen folgende Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{d\alpha}{ds_\alpha}; \qquad \frac{1}{\varrho_\beta} = \frac{d\beta}{ds_\beta};$$

da α und β Funktionen des Ortes, also

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\cdot d\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\, d\eta$$

$$d\beta = \frac{\partial \beta}{\partial \xi}\cdot d\xi + \frac{\partial \beta}{v\eta}\, d\eta$$

sind, so folgt längs der U-Linie

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\alpha}{ds_\alpha} + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta_\alpha}{ds_\alpha}$$

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\beta}{ds_\beta} + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta_\beta}{ds_\beta}$$

und unter Benützung obiger Identitäten

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = +\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\cos\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\sin\alpha = +\frac{\partial \sin\alpha}{\partial \xi} - \frac{\partial \cos\alpha}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = +\frac{\partial \beta}{\partial \xi}\cos\beta + \frac{\partial \beta}{\partial \eta}\sin\beta = +\frac{\partial \sin\beta}{\partial \xi} - \frac{\partial \cos\beta}{\partial \eta}.$$

Die Ausführung der partiellen Differentiationen durch Einsetzen der Werte von $\sin\alpha = \frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}$ usw. ergibt

$$\frac{\partial \sin\alpha}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = +\frac{1}{M^2}\left(M\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial M}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial \sin\beta}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = +\frac{1}{M^2}\left(M\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta^2} - \frac{\partial M}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{\partial \cos\beta}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = +\frac{1}{M^2}\left(M\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\,\partial \eta^2} - \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial \cos\alpha}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{M}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = -\frac{1}{M^2}\left(M\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

und hiermit

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\right) - \frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial M}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

und mit Rücksicht auf b_1 und die obigen Identitäten

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\cdot\frac{\frac{\partial U}{\partial \xi}}{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\cdot\frac{\frac{\partial U}{\partial \eta}}{M}\right] - \frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial \xi}\cdot\frac{\frac{\partial U}{\partial \xi}}{M} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{\frac{\partial U}{\partial \eta}}{M}\right]$$

$$= -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\beta}{ds_\beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta_\beta}{ds_\beta}\right) - \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\beta}{ds_\beta} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta_\beta}{ds_\beta}\right)$$

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = -\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{ds_\beta} - \frac{1}{M}\cdot\frac{dM}{ds_\beta} \qquad \text{XVa}$$

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = -\frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)$$

$$= -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial \xi}\cdot\frac{\frac{\partial U}{\partial \eta}}{M} - \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{\frac{\partial U}{\partial \xi}}{M}\right)$$

$$= -\frac{1}{M^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{d\xi_\alpha}{ds_\alpha} + \frac{\partial M}{\partial \eta}\cdot\frac{d\eta_\alpha}{ds_\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = \frac{1}{M}\cdot\frac{dM}{ds_\alpha} \qquad \text{XVb}$$

Mit Hilfe der Gleichung XVa läßt sich der Krümmungsradius der Trajektorie zu einer V-Linie bestimmen, wenn längs derselben die Werte von M und μ gegeben sind, mit Hilfe der Gleichung XVb derjenige der Trajektorie zu einer U-Linie, wenn längs derselben die Werte von M gegeben sind.

Durch das dem berechneten Wert eines Krümmungsradius zukommende Vorzeichen ist die Lage des Krümmungsmittelpunktes gekennzeichnet. Im Koordinatensystem ξ, η entspricht einem negativen Wert vom ϱ konvexe, einem posiven Wert konkave Krümmung gegen die ξ-Achse.

Aus der Form der Gleichungen XV

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = -\frac{1}{\left(\mu : \frac{d\mu}{d s_\beta}\right)} - \frac{1}{\left(M : \frac{d M}{d s_\beta}\right)} = -\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \quad \ldots \quad \text{XV a'}$$

$$\frac{1}{\varrho_\beta} = -\frac{1}{\left(M : \frac{d M}{d s_\alpha}\right)} = +\frac{1}{q} \quad \ldots \quad \text{XV b'}$$

ergibt sich folgendes Verfahren für die graphische Bestimmung der Werte von m, n und q und damit von ϱ_α und ϱ_β: es sind nämlich

$$m = \mu : \frac{d\mu}{d s_\beta}$$

$$n = M : \frac{d M}{d s_\beta}$$

$$q = M : \frac{d M}{d s_\alpha}.$$

Trägt man z. B. (Fig. 18) auf der in eine Gerade gestreckten Linie $c\,d$ die den einzelnen Punkten derselben entsprechenden Werte von M auf, so erhält man die M-Kurve über $c\,d$ und ist aus nebenstehender Figur ersichtlich, daß die Strecke

$$\overline{P\,Q} = M : \frac{d M}{d s_\beta} = n$$

ist, der Wert von n wird mit $d\,M$ positiv oder negativ; es muß hierbei natürlich für die Ordinaten M der gleiche Maßstab verwendet werden wie für die Abszissen, was deshalb möglich ist, weil auch im Koordinatensystem $\xi\,\eta$ die Koordinatenwerte nicht als Längenwerte, sondern als Verhältniswerte genommen sind, so daß wieder alle Funktionswerte die Werte aller Abgeleiteten und deren Funktionen, also auch reine Zahlen sind.

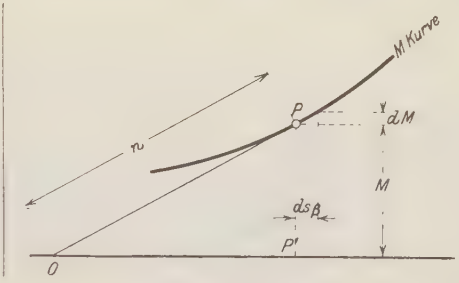

Fig. 18.

Die Benützung der Krümmungsradien ist speziell an denjenigen Stellen des Netzes von Vorteil, wo Netzlinien mit starker Krümmung vorkommen.

Koordinatentransformation.

Für die Aufstellung der Differentialgleichungen bestimmter Netzformen wird es dienlich sein, vom kartesischen Koordinatensystem, auf das Zylinderkoordinatensystem überzugehen, eventuell, wenn die φ, ψ, χ-Flächen selbst dreifach orthogonal sind, die in bezug auf das kartesische Koordinatensystem abgeleiteten Gleichungen auf das System φ, ψ, χ zu transformieren; es werden zu dem Zwecke die nötigen Transformationsformeln aus Riemann-Weber, „Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik" I. Bd., § 41, Seite 95 u. f. mit den dort gebrauchten Bezeichnungen aufgeführt.

Es seien x, y, z die kartesischen, p, q, r die neuen, im allgemeinen krummlinigen, jedoch dreifach orthogonalen Koordinaten, so daß x, y, z je durch eine Funktion von p, q und r darstellbar sind. Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial p} = a; \quad \frac{\partial x}{\partial q} = a'; \quad \frac{\partial x}{\partial r} = a'' \\
&\frac{\partial y}{\partial p} = b; \quad \frac{\partial y}{\partial q} = b'; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = b'' \\
&\frac{\partial z}{\partial p} = c; \quad \frac{\partial z}{\partial q} = c'; \quad \frac{\partial z}{\partial r} = c''
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
e &= a^2 + b^2 + c^2 \\
e' &= a'^2 + b'^2 + c'^2 \\
e'' &= a''^2 + b''^2 + c''^2
\end{aligned}$$

werden

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{a}{e}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{b}{e}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{c}{e} \\
&\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{a'}{e'}; \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{b'}{e'}; \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{c'}{e'} \\
&\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{a''}{e''}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{b''}{e''}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{c''}{e''}
\end{aligned}\right\} \quad \text{A}$$

Ferner, wenn U eine Funktion von x, y, z resp. p, q, r ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial p}\cdot\frac{a}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\cdot\frac{a'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{a''}{e''} \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial p}\cdot\frac{b}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\cdot\frac{b'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{b''}{e''} \\
\frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial p}\cdot\frac{c}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\cdot\frac{c'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{c''}{e''}
\end{aligned}\right\} \quad \text{B}$$

und

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\sqrt{e\,e'\,e''}}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\sqrt{\frac{e'\,e''}{e}}\cdot\frac{\partial U}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left(\sqrt{\frac{e''\,e}{e'}}\cdot\frac{\partial U}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\frac{e\,e'}{e''}}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right] \quad \text{C}$$

Für die Transformation des kartesischen auf das Zylinderkoordinatensystem bestehen zwischen den Koordinaten folgende Beziehungen, wenn man z. B. die x-Achse als Zylinderachse nimmt:

$$\left.\begin{aligned} x &= p \\ y &= r\cos q \\ z &= r\sin q \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &r \text{ ist hierbei die radiale} \\ &q \text{ die (Winkel-)Bogenkoordinate} \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} d\,x &= 1\cdot d\,p + 0\,d\,q + 0\,d\,r \\ d\,y &= 0\cdot d\,p - r\sin q\,d\,q + \cos q\,d\,r \\ d\,z &= 0\cdot d\,p + r\cos q\,d\,q + \sin q\,d\,r \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} a &= 1 & a' &= 0 & a'' &= 0 \\ b &= 0 & b' &= -r\sin q & b'' &= +\cos q \\ c &= 0 & c' &= +r\cos q & c'' &= +\sin q \\ e &= 1 & e' &= r^2 & e'' &= 1 \end{aligned}$$

und hiermit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 1; & \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial q}{\partial y} &= -\frac{\sin q}{r}; & \frac{\partial q}{\partial z} &= +\frac{\cos q}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial r}{\partial y} &= +\cos q; & \frac{\partial r}{\partial z} &= +\sin q \end{aligned}\right\} \quad \text{A}_z$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial p} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial U}{\partial q}\cdot\frac{\sin q}{r} + \frac{\partial U}{\partial r}\cos q \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial q}\cdot\frac{\cos q}{r} + \frac{\partial U}{\partial r}\sin q \end{aligned}\right\} \quad \text{B}_z$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(r\cdot\frac{\partial U}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right\} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial p^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned} \quad \text{C}_z$$

Beispiele.

I.

Die χ-Flächen seien Ebenen parallel zur XY-Ebene des kartesischen Koordinatensystems; deren Gleichung ist: $\chi = z$, und dementsprechend:

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = 0; \quad \gamma_3 = 1; \quad C = 1.$$

Aus den Gleichungen IV folgt:

$$\alpha_1 = \beta_2 \nu \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \nu$$

$$\alpha_2 = -\beta_1 \nu \quad \text{„} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \nu$$

$$\alpha_3 = 0 \cdot \nu \quad \text{„} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

das letzte Resultat bedeutet, daß in diesem Fall φ unabhängig von z, also nur eine Funktion von x und y ist.

1. Annahme: $\nu =$ konstant $= 1$.

Es werden:

$$\alpha_1 = \beta_2 \text{ oder: } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \alpha_2 = -\beta_1 \text{ oder: } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad A = B.$$

Durch partielles Differentiieren einmal der ersten dieser Gleichungen nach x, der zweiten nach y, dann umgekehrt, folgen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

als Bestimmungsgleichungen der Funktionen φ und ψ; die erste derselben ergibt sich ebenfalls aus V_a mit $\nu = 1$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$; die zweite derselben aus $V_b{}^*$ mit $C = 1$.

Die allgemeine Integration dieser simultanen Differentialgleichungen erfolgt nach der Funktionentheorie durch Umformung und Trennung der reellen und imaginären Teile von Funktionen des komplexen Argumentes $(x + iy)$.

Die φ-Flächen und die ψ-Flächen sind Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur z-Achse und ergibt hiermit die erste derselben nach der gewählten Bezeichnungsweise im Verein mit der Gleichung $\chi = z$ die ψ-Linien, die zweite im Verein mit $\chi = z$ die φ-Linien (Bahnlinien).

(In den Lehrbüchern der Hydrodynamik werden im Gegensatz zu obiger Bezeichnung gewöhnlich die Bahnlinien als ψ-Linien bezeichnet; bei der gewählten Darstellung erscheint obige Bezeichnung zweckmäßiger, da die Lage eines Punktes in einer bestimmten Bahnlinie eben durch deren Schnitt mit einer φ-Fläche bestimmt ist.)

Es folgt ohne weiteres, daß in den Fällen $\chi = z$ die ψ- und φ-Linien für alle χ-Ebenen kongruente Kurven sind, so daß die Darstellung in einer der χ-Ebenen vollkommen Aufschluß über den Verlauf aller dieser Kurven gibt; man nennt daher entsprechende Strömungen mit Netzformen dieser Art zweidimensionale Strömungen.

Beispiel: Aus der komplexen Funktion

$$Z = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

ergeben sich durch oben bemerkte Abtrennung:

$$\varphi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy.$$

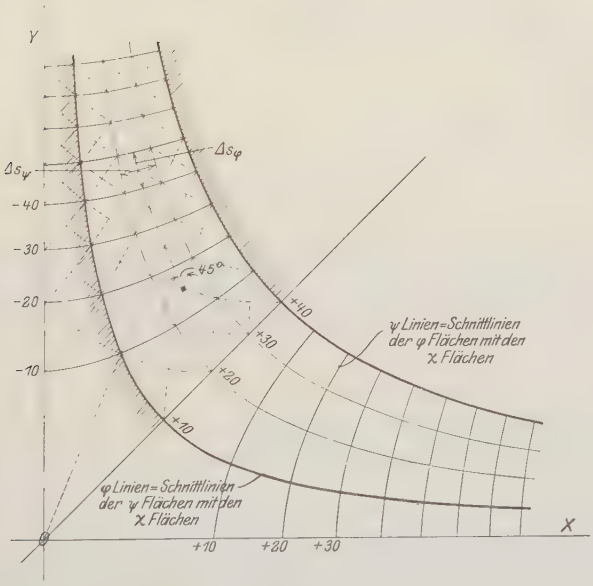

Fig. 19.

Hiernach sind die in der XY-Ebene gelegenen Leitlinien der φ- und ψ-Flächen gleichseitige Hyperbeln mit dem Koordinatenursprung als gemeinschaftlichen Mittelpunkt: Fig. 19.

Es werden

$$\alpha_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = +2x, \qquad \beta_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} = +2y$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y, \qquad \beta_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = +2x$$

$$A = 4(x^2 + y^2) \qquad B = 4(x^2 + y^2)$$

$$ds_\varphi = \frac{d\varphi}{\sqrt{A}} = \frac{d\varphi}{2\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad ds_\psi = \nu \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot d\psi = \frac{d\psi}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$df = \frac{\nu}{\sqrt{A}} d\psi\, d\chi = \frac{d\psi \cdot d\chi}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

und mit endlichen Differenzen:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varphi = \Delta\psi = \Delta\chi = \Delta z,$$

$$\Delta f = \frac{\Delta\varepsilon^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\varepsilon^3}{4(x^2+y^2)},$$

$\Delta\varepsilon = \Delta z$ bedeutet, daß die Länge eines Elementes der z-Achse als Maß der Differenz der Funktionswerte zu wählen ist.

Bezüglich anderer Formen solcher Art und deren Eigenschaften wird auf die diesbezügliche reichliche Literatur verwiesen[1]).

Graphische Beispiele.

Aus der ersten der drei Gleichungen XII ergibt sich mit $\nu = 1$, $C = 1$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = 1.$$

Die Netzlinien einer χ-Ebene grenzen mithin krummlinige rechtwinklige Vierecke ab, deren Diagonalen unter 45^0 gegen die φ- und ψ-Linien geneigt sind und bilden hiermit konforme Grundnetze.

Fall a. Fig. 20.

Gegeben sind eine φ-Linie und auf derselben diejenigen Punkte in denen dieselbe die φ-Flächen durchdringt, deren Funktionswerte nach einer arithmetischen Reihe zunehmen: es seien 0, 1, 2, 3, . . . solche Punkte auf der Linie ab; zieht man durch diese Punkte Linien,

[1]) Lamb: Hydrodynamik. Wien: Hydrodynamik. Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.

die unter 45^0 gegen die Tangenten in diesen Punkten geneigt sind, so erhält man in deren Schnittpunkten zwei zweitere Punktreihen, die wieder auf Bahnlinien liegen, und kann man von denselben ab das Verfahren wiederholen.

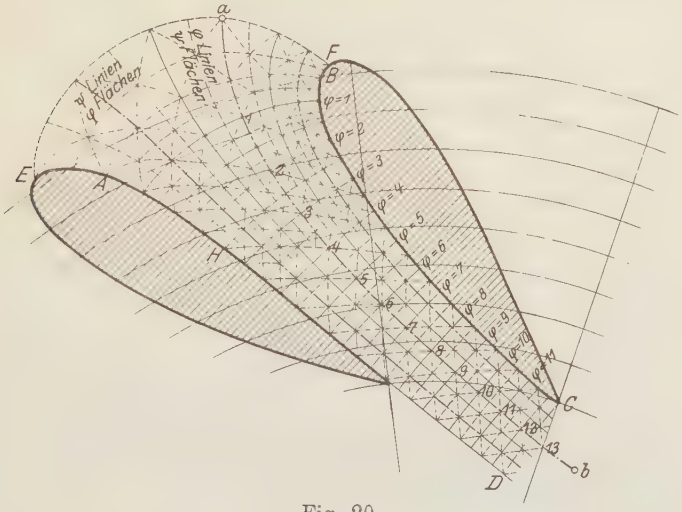

Fig. 20.

Wird nun der Wert der Differenz $\Delta\varepsilon$ angenommen, so folgt aus der dritten der Gleichungen VIII, d. i. $\Delta s_\chi = \nu \sqrt{\frac{\bar{B}}{A}}\,\Delta\chi$, mit $\nu = 1$ und $\Delta\chi = \Delta\varepsilon$, und weil $A = B$ ist:

$$\Delta s_\chi = \Delta\varepsilon = \Delta z = \Delta\chi$$

d. h. der Wert $\Delta\varepsilon$ ist ein Maß der Abstände der χ-Ebenen. Aus der ersten der Gleichungen VIII ergibt sich mit $\nu = 1$ und $\Delta\varphi = \Delta\varepsilon$:

$$\Delta s_\varphi = \frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{A}} \text{ und wegen } \Delta s\varphi = \Delta s\psi$$

$$\sqrt{A} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s_\psi},$$

wodurch die Werte von $\sqrt{A}$ in den einzelnen Punkten aus den Längen Δs_ψ und dem Wert $\Delta\varepsilon$ bestimmt sind; es werden hiernach

$$\Delta f = \Delta s_\varphi \cdot \Delta\varepsilon = \Delta s_\psi \cdot \Delta\varepsilon$$
$$\Delta\tau = (\Delta s_\varphi)^2 \Delta\varepsilon = (\Delta s_\psi)^2 \cdot \Delta\varepsilon.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Werte von x, y, z und hiermit auch s_φ, s_ψ, s_χ Verhältniswerte sind, werden die wirklichen Werte

der entsprechenden Längen durch Multiplikation mit dem Längenwerte der Bezugseinheit a und ferner der wirkliche Flächenwert durch das Produkt $a^2 \Delta f$ und der wirkliche Volumwert Δ durch das Produkt $a^3 \cdot \Delta \tau$ bestimmt.

Fall b. Fig. 20, 21 [1]).

Sind eine Bahnlinie und die Werte von $\sqrt{A}$ längs derselben gegeben, so kann man die Punktverteilung für gleiche Differenzen

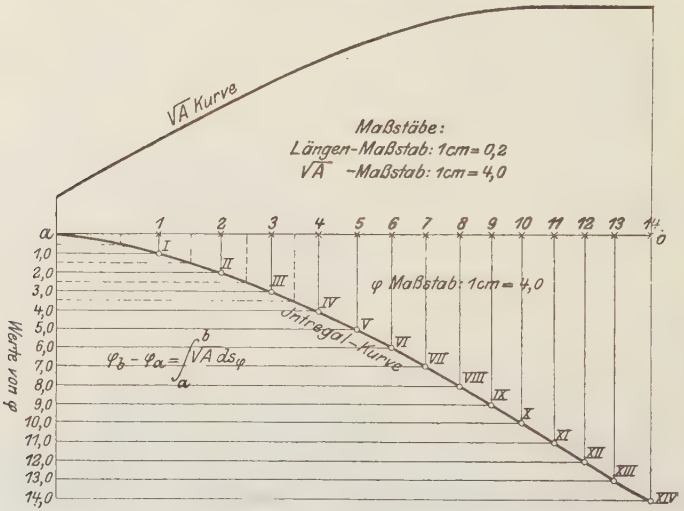

Fig. 21.

$\Delta \varphi = \Delta \varepsilon$ auf der Bahnlinie durch Berücksichtigung der ersten der Gleichungen VII erhalten, aus der sich ergibt

$$\varphi_b - \varphi_a = \int_a^b \sqrt{A}\, ds_\varphi .$$

Streckt man daher die gegebene Bahnlinie in eine Gerade aus, trägt auf derselben die $\sqrt{A}$-Werte auf und bestimmt sich durch Planimetrierung die Integralkurve, so gibt deren Endordinate b XIV den Wert von $\varphi_a - \varphi_b$; teilt man diese Ordinate in eine Anzahl n gleicher Teile ein, projiziert die Teilpunkte auf die Integralkurve und die so erhaltenen Punkte derselben wieder auf ab, so erhält man die Punktverteilung 0 1 2 3 auf ab entsprechend der Funktionsdifferenz

$$\Delta \varphi = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{n} = \Delta \varepsilon .$$

[1]) Dieses Beispiel gibt ein Stromnetz für Leitradkanäle von Francisturbinen.

Für die Bestimmung der Krümmungsradien ist in den Gleichungen XV_a' und XV_b'

$$\mu = 1; \qquad M = \sqrt{A}; \qquad ds_\alpha = ds_\psi;$$

und dementsprechend

$$\varrho_\alpha = \varrho_\psi; \qquad \varrho_\beta = \varrho_\varphi$$

zu setzen; man erhält:

$$\varrho_\psi = n = \frac{\sqrt{A}}{\left(\frac{d\sqrt{A}}{ds_\varphi}\right)}, \qquad \varrho_\varphi = q = \frac{\sqrt{A}}{\left(\frac{d\sqrt{A}}{ds_\psi}\right)}.$$

Man kann daher entsprechend der ersten Gleichung in derselben Figur, in der bei gegebenen Werten von $\sqrt{A}$ die Bestimmung der Punkteinteilung erfolgt, auch die Bestimmung von ϱ_ψ vornehmen.

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\frac{d\sqrt{A}}{ds_\psi} = \frac{\sqrt{A}}{\varrho_\varphi},$$

d. h. man erhält im Quotienten $\frac{\sqrt{A}}{\varrho_\varphi}$ ein Maß für die Veränderlichkeit von $\sqrt{A}$ längs der die φ-Linie schneidenden ψ-Linien.

Bestimmt man im obigen analytischen Beispiel x und y als Funktionen von φ und ψ, so erhält man

$$x^2 = +\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$$

$$y^2 = -\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$$

$$A = B = 4\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}.$$

Es wird

$$\varrho_\psi = \frac{\sqrt{A}}{\frac{d\sqrt{A}}{ds_\varphi}} = \frac{2A}{\frac{dA}{ds_\varphi}} = \frac{2\sqrt{A}}{\frac{dA}{d\varphi}},$$

nun ist längs einer φ-Linie ψ konstant, also

$$\frac{dA}{d\varphi} = \frac{4\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}} = \frac{16\varphi}{A},$$

hiermit

$$\varrho_\psi = \frac{1}{8}\frac{A\sqrt{A}}{\varphi}$$

und mit den Werten von A und φ ausgedrückt durch die Koordinaten x und y

$$\varrho_\psi = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2-y^2)}$$

und so analog

$$\varrho_\varphi = \frac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{2xy},$$

als Gleichungen der Krümmungsradien.

2. Annahme: ν = veränderlich, z. B. $= e^{kx}$ mit k = einer Konstanten.

Es werden

$$\alpha_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}e^{+kx};\quad \alpha_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}e^{+kx};\quad \alpha_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

durch partielle Differenzierung wie im früheren Fall, erhält man:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-k\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+k\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

als simultane Differentialgleichungen der Zylinderflächen φ und ψ mit Erzeugenden parallel zur z-Achse, deren Schnitte mit den χ-Ebenen wieder die ψ- resp. φ-Linien geben, die wie im früheren Fall kongruent in allen χ-Ebenen sind; solche Strömungsformen gehören daher auch zu den zweidimensionalen Strömungen. Die allgemeine Integration obiger Differentialgleichungen kann durch Potenzreihen erfolgen; eine partikuläre Lösung erhält man mit

$$\varphi = y e^{kx},\qquad \psi = \frac{k}{2}y^2 - x.$$

Die ψ-Linien sind hierbei transzendente Kurven, die φ-Linien in der x-Richtung parallel verschobene Parabeln, Fig. 22.

Für die graphische Bestimmung entsprechender Netze hat man

$$\operatorname{tg}\tau = e^{kx}.$$

Die Netzkonstruktion kann nach dem allgemeinen Verfahren erfolgen.

Man erhält durch analoge Rechnungen wie im vorhergehenden Fall

$$\Delta s_\chi = \Delta\varepsilon,\qquad \Delta f = \Delta s_\varphi \Delta\varepsilon,\qquad \Delta_\tau = \frac{\Delta s_\varphi{}^2}{e^k}\Delta\varepsilon$$

als Verhältniswerte für die Bestimmung von Δs_χ, Δf und $\Delta \tau$. Ebenso gilt bezüglich der Bestimmung der Werte von n, m und q dasselbe wie früher; es wird in diesem Fall

$$\mu = e^{-kx}, \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial s_\varphi} = -k\frac{dx}{ds_\varphi} = -k\cos\alpha_x$$

mit $\alpha_x =$ Tangentenwinkel der Bahn gegen die x-Achse; hiermit können die Krümmungen resp. Krümmungsradien der ψ-Linien in den Teilpunkten der Bahnlinien bestimmt werden.

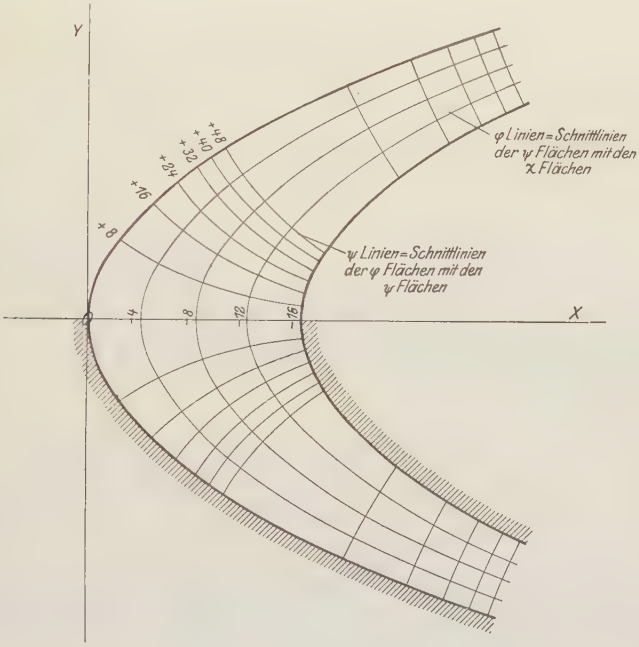

Fig. 22.

In den behandelten Fällen liegen Netze der χ- und φ- resp. der χ- und ψ-Linien auf Zylinderflächen, deren Entwicklung in Ebenen die konformen Abbildungen der Netze liefert.

II.

Das System der χ-Flächen sei durch ein, die x-Achse als gemeinschaftliche Schnittlinie enthaltendes Ebenenbüschel gebildet; die allgemeine Gleichung eines solchen Systems ist hiermit bestimmt durch

$$\chi = F\left(\frac{z}{y}\right),$$

wobei F noch eine beliebige Funktion des Argumentes $\frac{z}{y}$ sein kann; es seien vorerst folgende zwei spezielle Annahmen gemacht:

$$\nu = \text{konst.} = 1; \qquad \chi = \operatorname{arctg} \frac{z}{y}.$$

Hiermit und wenn man $z^2 + y^2 = r^2$ einsetzt, werden

$$\gamma_1 = 0; \quad \gamma_2 = -\frac{z}{r^2}; \quad \gamma_3 = +\frac{y}{r^2}; \quad C = \frac{1}{r^2}$$

und somit entsprechend den Gleichungen IV

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{z}{r^2} \\ \alpha_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{y}{r^2} \\ \alpha_3 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{z}{r^2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ \text{a}$$

Es erscheint in diesem Fall zweckmäßig auf das Zylinder-Koordinatensystem überzugehen und ergeben sich unter Beibehaltung der Bezeichnung p, q, r für die neuen Koordinaten die Transformationsgleichungen nach B_z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\sin q}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos q$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\cos q}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin q$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial q} \frac{\sin q}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos q$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial q} \cdot \frac{\cos q}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin q$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = - \frac{\partial \chi}{\partial q} \frac{\sin q}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \cos q$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial q} \cdot \frac{\cos q}{r} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \sin q$$

Da nun

$$\frac{y}{r} = \cos q; \qquad \frac{z}{r} = \sin q$$

sind, ergibt sich mit den Werten γ_1, γ_2, γ_3

$$\frac{\partial \chi}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{z}{r^2} = -\frac{\partial \chi}{\partial q} \cdot \frac{z}{r^2} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} = +\frac{y}{r^2} = +\frac{\partial \chi}{\partial q} \frac{y}{r^2} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{z}{r}.$$

Mithin erhält man

$$\frac{\partial \chi}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial q} = 1; \qquad \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0$$

also χ unabhängig von r und p und gleich der Bogenkoordinate, d. h. bei $\Delta \chi = \Delta \varepsilon$ = konst. haben die Ebenen des Büschels gleichen Abstand; man wird dienlicherweise $\Delta \varepsilon = \frac{2\pi}{i}$ wählen, wobei i eine ganze Zahl ist und die Anzahl der Ebenen des Büschels um die Achse bedeutet.

Die Transformationsgleichungen der Ableitungen von φ und ψ vereinfachen sich noch bei der dritten speziellen Annahme, daß φ und ψ unabhängig von der Bogenkoordinate, also $\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial q} = 0$ seien. Dies bedeutet, daß die φ- und ψ-Flächen Umdrehungsflächen sind mit der p, d. i. die x-Achse als geometrische Achse. Die Schnittlinie dieser Flächen mit den χ-Ebenen geben ebene und kongruente Netze der ψ- und φ-Linien in den χ-Flächen; es genügt deshalb wieder die Zeichnung eines Netzes in einer Ebene.

Mit der letzten Annahme erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos q; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = +\frac{\partial \psi}{\partial r} \cos q$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = +\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin q; \qquad \frac{\partial \psi}{\partial z} = +\frac{\partial \psi}{\partial r} \sin q$$

und hiermit aus den Gleichungen a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = +\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\sin^2 q}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\cos^2 q}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin q = -\frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\sin q}{r}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos q = -\frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\cos q}{r}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = +\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial p} \quad \ldots \quad \text{b}$$

Durch partielles Differentiieren können diese beiden Gleichungen wieder umformt werden; man erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial q}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{c}$$

als simultane Differentialgleichungen zur Bestimmung der Funktionen φ und ψ und somit der Netze der ψ und φ-Linien.

Die Integration derselben kann durch Potenzreihen erfolgen; man erhält

$$\varphi = a \lg r + 2P - P^{II}\frac{r^2}{2} + P^{IV}\cdot\frac{r^4}{4\cdot 8} + P^{VI}\cdot\frac{r^6}{6\cdot 8\cdot 24} - \ldots$$

$$\psi = ap + P^{I} r^2 - P^{III}\cdot\frac{r^4}{8} + P^{V}\cdot\frac{r^6}{8\cdot 24} - \ldots,$$

worin a eine beliebige konstante Zahl, P eine beliebige Funktion von p und P^{I}, P^{II}, P^{III}, ... deren erste, zweite, dritte ... Ableitung nach p bedeuten.

Man kann Strömungen mit Formen solcher Art als einfache Strömungen in Rotationshohlräumen oder als achsensymmetrische Meridionalströmungen bezeichnen.

Siehe hierüber auch Prášil „Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen". Schweiz. Bauztg. Bd. XLI.

Für die graphische Netzkonstruktion in einer χ-Ebene erhält man

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = \frac{1}{r},$$

das Verfahren bleibt dasselbe, wie in den früheren Fällen; es ist zweckmäßig, die Länge des dem Anfangspunkt der Linie zukommenden Radius als Bezugseinheit für die Längen zu wählen.

Ein entsprechendes Beispiel ist in Fig. 23 durchgeführt.

Man erhält ferner

$$\Delta s_\varphi = \frac{\Delta \varepsilon}{\sqrt{A}}; \qquad \Delta s_\psi = r\,\Delta\varepsilon; \qquad \Delta f = \Delta s_\varphi \cdot \Delta\varepsilon; \qquad \Delta\tau = \Delta s_\varphi{}^2 \Delta\varepsilon$$

oder mit $\Delta\varepsilon = \frac{2\pi}{i}$

$$\Delta s_\chi = r\frac{2\pi}{i}, \qquad \Delta f = \Delta s_\varphi \frac{2\pi}{i}, \qquad \Delta\tau = \Delta s_\varphi{}^2 \cdot \frac{2\pi}{i}.$$

Aus den simultanen Differentialgleichungen für φ und ψ erkennt man, daß in diesem Fall $\mu = r$ ist und daß man für die Bestimmung der Krümmungen wieder

$$M = \sqrt{A}, \qquad ds_\alpha = ds_\varphi, \qquad ds_\beta = M_\varphi$$

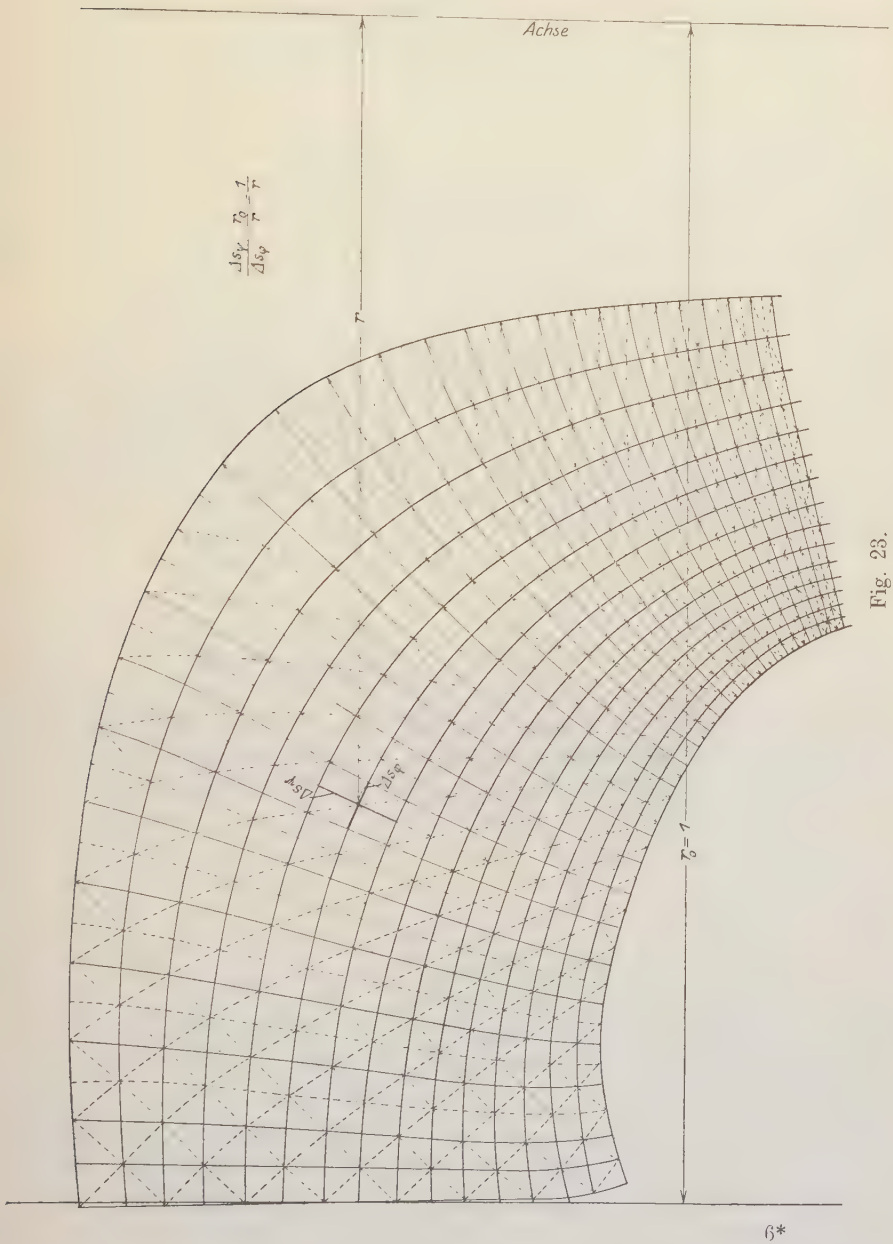

Fig. 23.

zu setzen hat, so daß man erhält

$$m = r : \frac{dr}{ds_\varphi}$$

$$n = \sqrt{A} : \frac{d\sqrt{A}}{ds_\varphi}$$

$$q = \sqrt{A} : \frac{d\sqrt{A}}{ds_\psi}.$$

Der Wert von n ergibt sich aus dem Längenwert der Tangente an die Bahnlinie vom Berechnungspunkt bis zur Achse.

Es werden

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{1}{q}; \quad \frac{1}{\varrho_\psi} = -\frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

Soll das Netz die Achse als φ-Linie enthalten, so geht man am besten von derselben aus; es versagt aber vorläufig das allgemeine Verfahren, da an der Achse $r = 0$, also $\operatorname{tg}\tau = \infty$ wird; überhaupt tritt an der Achse insofern eine Abweichung auf, als die der Achse zunächst liegende χ-Fläche eine Röhre mit vollen Kreisquerschnitten, zwei andere ψ-Flächen Röhren mit kreisringförmigen Querschnitten bilden.

Aus Gleichung XIII ergibt sich mit $\nu = 1$ als Maß des Flächeninhaltes eines Ringquerschnitt-Elementes

$$\Delta f = \frac{\Delta\varepsilon^2}{\sqrt{A}};$$

hierin ist derjenige Wert von $\sqrt{A}$ einzusetzen; der dem durch die Diagonalen des Elementes bestimmten Punkte zukommt, und da in einer Ringfläche sämtliche Diagonalenschnittpunkte auf einem Parallelkreis liegen, so hat $\sqrt{A}$ für alle diese Punkte denselben Wert; $i\Delta f$ ist ein Maß des Flächeninhaltes der ganzen Ringfläche und mit $\Delta\varepsilon = \frac{2\pi}{i}$ wird somit

$$(i \cdot \Delta f)\sqrt{A} = \frac{4\pi^2}{i} = \text{konst.},$$

d. h. das Produkt aus Ringflächeninhalt in den zugehörigen Wert von $\sqrt{A}$ hat für alle zwischen benachbarten Flächen auf den φ-Flächen liegenden Ringflächen denselben Wert; bestimmt man nun die der Achse zunächst liegende ψ-Fläche derart, daß für die von derselben auf den φ-Fläehen abgegrenzten Kreisflächen ebenfalls die zuletzt gefundene Beziehung gilt, so lassen sich die Punkte der Meridianlinie dieser

ψ-Fläche bestimmen, wenn die Verteilung von $\sqrt{A}$ längs der Achse bekannt ist, da wegen $\varrho_\varphi = \sqrt{A} : \frac{d\sqrt{A}}{ds_\psi} = \infty$ $\frac{d\sqrt{A}}{ds_\psi} = 0$ wird, also der Wert von $\sqrt{A}$ längs einer ψ-Linie in der Nähe der Achse sehr wenig veränderlich ist.

Die an den durch die Punkte der Achse gezogenen ψ-Linienelementen abzutragenden $s\psi_1$-Längen sind zu rechnen aus der Formel

$$s_{\psi_1}^2 \pi \sqrt{A} = \frac{4\pi^2}{i}.$$

Man erhält durch Auftragen der Längen s_{ψ_1} die Meridianlinie der der Achse zunächst liegenden ψ-Fläche und kann hiernach unter Verwendung des allgemeinen Verfahrens das Netz vervollständigt werden.

(Natürlich muß die Anzahl i der um die Achse gleichmäßig verteilten χ-Flächen so groß gewählt werden, daß der Flächeninhalt der Kugelkalotte von der Bogenlänge s_{ψ_1} noch gleich $s_{\psi_1}^2 \pi$ gesetzt werden kann.)

Die Netze der χ- und φ-Linien auf den ψ-Flächen und diejenigen der χ- und ψ-Linien auf den φ-Flächen bestehen aus Parallelkreisen und Meridianlinien; über deren konforme Darstellung in Ebenen siehe Prášil: Zur Geometrie der konformen Abbildungen von Schaufelrissen. Schweiz. Bauzeitg., Bd. LII, Nr. 7 und 8. Ein Auszug hiervon ist als Anhang dem Buche beigegeben.

Noch allgemeinere Formen erhält man, wenn man ν gleich einer Funktion von r oder von p oder von r und p wählt; es wird hierbei das graphische Verfahren der Netzbestimmung zur Anwendung kommen.

III.

Eine Verallgemeinerung der früheren Annahme erhält man, wenn man das System der χ-Flächen dadurch bildet, daß man eine Fläche von gegebener Form um eine Achse, z. B. um die X-Achse, dreht; im Zylinderkoordinatensystem, mit der $X = p$-Achse als Umdrehungsachse, stellt die Gleichung $F[r, p\,(q - q_0)] = 0$ mit q_0 als Parameter ganz allgemein solche Flächensysteme dar; die Auflösung nach q_0 ergibt mit $q_0 = \chi$ die Formen der χ-Funktion

$$\chi = q + f(r, p).$$

(Im früheren Beispiel war $f = 0$.)

Die Transformation der Hauptgleichungen IIIa, IV, Va auf Zylinderkoordinaten mit Hilfe der Gleichungen B_z ergibt für die Gleichungen III_a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \mathrm{III}_{az}$$

für die Gleichungen IV

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= +\frac{\partial\varphi}{\partial p} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q}\right)\nu \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial q}\cdot\frac{\sin q}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos q \\
&= -\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\frac{\cos q}{r} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\sin q\right]\nu \\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= +\frac{\partial\varphi}{\partial q}\cdot\frac{\cos q}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin q \\
&= -\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\frac{\sin q}{r} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\cos q\right]\nu
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV}_z$$

und hieraus

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial p} &= -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q}\right)\nu \\
\frac{\partial\varphi}{\partial q} &= +r\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\nu \\
\frac{\partial\varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q} - \frac{\partial\psi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)\nu
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV}'$$

Es werden ferner

$$A = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2$$

$$B = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2$$

$$C = \left(\frac{\partial\chi}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)^2$$

Die Gleichung V_a erhält die Form

$$\begin{aligned}
\nabla^2\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} \\
&= \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial p} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial q} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial r}\right) \quad \text{V}_a
\end{aligned}$$

Es soll nun die spezielle Form

$$\chi = q + \frac{2\pi}{h}p$$

in Betracht gezogen, d. h. die χ-Flächen als Schraubenflächen mit konstanter Steigung h und gleichem Bogenabstand angenommen werden.

Man erhält:

$$\frac{\partial\chi}{\partial p} = \frac{2\pi}{h}; \qquad \frac{\partial\chi}{\partial q} = 1; \qquad \frac{\partial\chi}{\partial r} = 0$$

und hiermit und aus der zweiten der Gleichungen III_{az} die Differentialgleichung

$$\frac{2\pi}{h}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0$$

als Bestimmungsgleichung für die Funktion φ; es ergibt sich hieraus

$$\varphi = R \cdot \Phi(\xi) + S \quad \text{mit} \quad \xi = \left(\frac{h}{2\pi} p - r^2 q\right),$$

wobei R und S beliebige Funktionen von r, und $\Phi(\xi)$ eine beliebige Funktion des Argumentes $\left(\frac{h}{2\pi} p - r^2 q\right)$ ist.

Die einfachste Form ergibt sich bei R oder $\Phi = 0$ mit $\varphi = S$; es werden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{dS}{dr},$$

d. h. die φ-Flächen sind konzentrische Zylinderflächen um die $p(x)$-Achse; aus der ersten der Gleichungen III_{az} folgt hiermit $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$, d. h. die Funktionsformen von ψ sind von r unabhängig.

Die beiden ersten der Gleichungen IV'_z werden identisch erfüllt; aus der letzten derselben folgt:

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{2\pi}{h}\frac{\partial \psi}{\partial q}\right) \nu.$$

Aus der Gleichung V_{az} folgt, daß in diesem Falle ν nur eine Konstante oder eine Funktion von r sein kann und hiermit aus der letzten Gleichung, daß ψ eine lineare Funktion von p und q, also von der Form

$$\psi = q + kp$$

sein muß; d. h. die ψ-Flächen sind ebenfalls Schraubenflächen mit konstanter Steigung; es werden hiernach die φ-Linien, d. h. die Schnittlinien der ψ- und χ-Flächen, zur $p(x)$-Achse senkrechte Gerade, die ψ- und χ-Linien sind Schraubenlinien auf den φ-Flächen.

Nimmt man die χ-Flächen als Leitflächen einer Strömung an, so wäre hiernach durch diese Form eine radiale Strömung zwischen den χ-Flächen bestimmt. Diese Strömungsform hat keine praktische Bedeutung.

Eine weitere Form ergibt sich mit $S = 0$; $R = +1$, $\Phi = \xi$, mithin durch

$$\varphi = \frac{h}{2\pi} \cdot p - r^2 q;$$

es werden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{h}{2\pi}; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -r^2; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2rq$$

und folgt hiermit und aus der zweiten der Gleichungen III_{az} die Differentialgleichung

$$\frac{h}{2\pi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \psi}{\partial q} - 2rq \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

zur Bestimmung der Funktion ψ.

Hieraus ergibt sich nach den bekannten Methoden der Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\psi = \Psi(\xi, \eta) \quad \text{mit} \quad \xi = \left(\frac{2\pi}{h} \cdot p + q\right)$$
$$\eta = (q^2 - \lg r),$$

d. h. ψ ist eine beliebige Funktion der Argumente ξ und η oder da ξ genau die Form der Funktion χ besitzt

$$\psi = \Psi(\chi, \eta).$$

Bei der Annahme: $\psi = \Psi(\chi)$ wird $\psi =$ konstant, wenn χ konstant ist; d. h. die ψ-Flächen dieser Funktionsform sind der Form nach identisch mit den χ-Flächen, besitzen jedoch andere Zuteilung der Funktionswerte.

Eine weitere einfache Form der ψ-Flächen ist bestimmt durch:

$$\psi = \eta = q^2 - \lg r,$$

d. i. die Gleichung von Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur $p(x)$-Achse, deren in der (YZ)-Ebene gelegenen Leitlinien obiger Gleichung in Polarkoordinaten mit ψ als Parameter entsprechen. Die φ-Linien sind die Schnittlinien dieser Zylinderflächen mit den χ-Flächen.

Das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{h}{2\pi} p - r^2 q \\ \psi &= q^2 - \lg r \\ \chi &= q + \frac{2\pi}{h} p \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{a}$$

stellt daher vorläufig in lediglich geometrischer Hinsicht eine mögliche Strömungsform zwischen Schraubenflächen als Leitflächen dar, wobei φ die Querschnittsflächen sind.

Diese Funktionen ergeben aus den Gleichungen IV_z

$$\frac{h}{2\pi} = + \frac{\nu}{r^2}; \quad -r^2 = -\frac{2\pi}{h}\nu; \quad -2rq = -\frac{2q}{r} \cdot \frac{2\pi}{h} \cdot \nu, \text{ hiermit } \nu = + \frac{h r^2}{2\pi} \text{ und}$$

weiter:

$$\left.\begin{aligned} A &= \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2 + (2rq)^2 \\ B &= \left(\frac{4q}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \\ C &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} ds_\varphi &= \sqrt{\frac{1}{A}} \cdot d\varphi \\ ds_\psi &= \nu \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot d\psi \\ ds_\chi &= \nu \sqrt{\frac{B}{A}} \cdot d\chi \end{aligned}\right| \quad A = \nu^2 \cdot B\,C \cdot \sin^2 \omega$$

$$\frac{\Delta s_\psi}{\Delta s_\varphi} = r\sqrt{C} = \frac{h r^2}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 + \frac{1}{r^2}} \qquad \Delta f = \frac{\nu}{\sqrt{A}}\Delta\varepsilon^2 = \frac{h r^2}{2\pi\sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2 + (2rq)^2}}\cdot\Delta\varepsilon^2$$

$$\frac{\Delta s_\chi}{\Delta s_\varphi} = r\sqrt{B} = \frac{h r^2}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2q}{r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}}$$

$$\frac{\Delta s_\chi}{\Delta s_\psi} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{[(2q)^2 + 1]\,h^2}{[(2\pi r)^2 + h^2]}} \qquad \Delta\tau = \frac{\nu}{A}\Delta\varepsilon^3 = \frac{h r^2}{2\pi\left[\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2 + (2rq)^2\right]}\cdot\Delta\varepsilon^3$$

Für die orthogonalprojektivische Darstellung z. B. der in einer χ-Fläche gelegenen ψ- und q-Linien erhält man durch Elimination von p aus den Gleichungen für φ und χ mit:

$$\varphi = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2(\chi - q) - r^2 q\,.$$

Die Gleichung der Projektionen der ψ-Linien auf die Koordinatenebene $r.\ q$ (Ebene senkrecht zur p-Achse): die Gleichung $\psi = q^2 - \lg r$

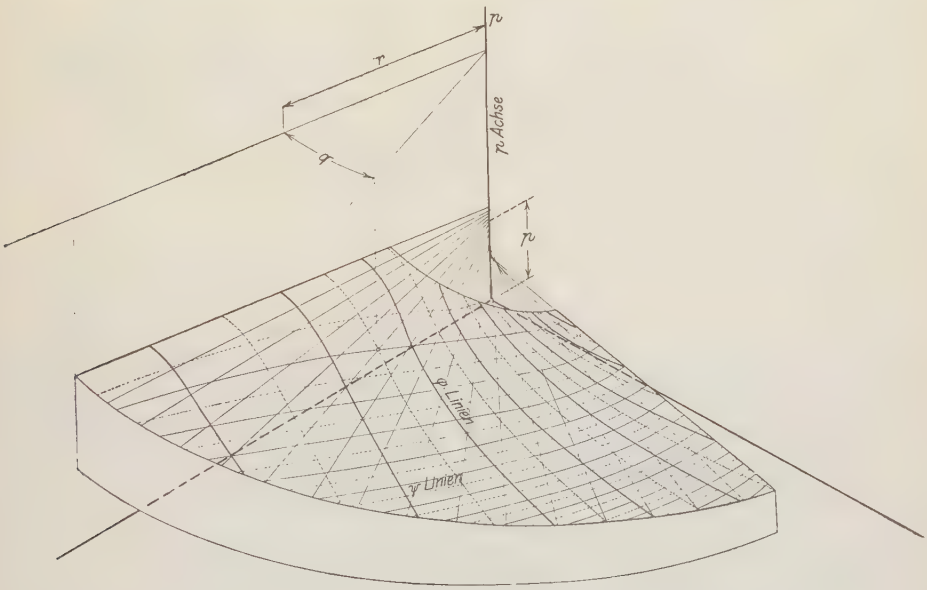

Fig. 24.

gibt an sich die Projektion der φ-Linien auf dieselbe Ebene; sind diese Projektionen gezeichnet, so bietet die Darstellung im Auf- und Seitenriß keine weiteren Schwierigkeiten. Eine axonometrische Darstellung eines solchen $\varphi\,\psi$-Liniennetzes auf einer Schraubenfläche gibt Fig. 24.

Die konforme Darstellung des in einer χ-Fläche gelegenen φ, ψ-Netzes ergibt sich, in Anlehnung an die Entwicklungsweise für die konforme Abbildung von Rotationsflächen wie folgt.

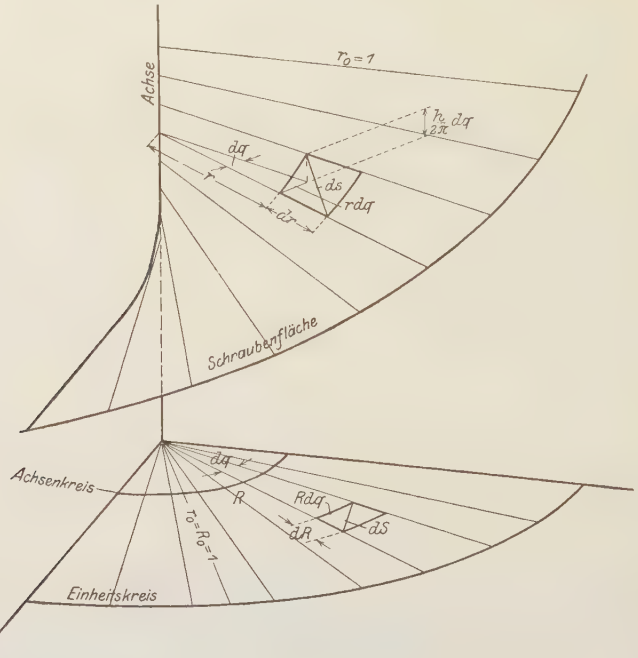

Fig. 25.

Die Länge ds eines beliebigen Linienelementes auf der χ-Fläche, Fig. 25, ist bestimmt durch die Gleichung

$$ds^2 = dp^2 + (r\,dq)^2 + dr^2$$

und aus der Gleichung der Fläche folgt

$$d\chi = dq + \frac{2\pi}{h} dp = 0, \text{ oder } dp = -\frac{h}{2\pi} dq;$$

hiermit

$$ds^2 = \left[\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2\right] dq^2 - dr^2.$$

Die Länge dS eines Linienelementes in der Ebene ist in Polarkoordinaten R, Q bestimmt durch die Gleichung

$$dS^2 = R^2\,dQ^2 + dR^2.$$

Für zwei zugeordnete Punkte muß entsprechend der Konformitätsbedingung das Verhältnis

$$\frac{d\,s^2}{d\,S^2} = \frac{\left[\left(\frac{h}{2\,\pi}\right)^2 + r^2\right] d\,q^2 + d\,r^2}{R^2\,d\,Q^2 + d\,R^2}$$

derart beschaffen sein, daß es nur abhängig von den Koordinaten der zugeordneten Punkte ist.

Das wird u. a. erreicht, wenn man $Q = q$ wählt und zwischen r und R die Beziehung besteht

$$\frac{d\,r}{\sqrt{\left(\frac{h}{2\,\pi}\right)^2 + r^2}} = \frac{d\,R}{R};$$

denn dann wird tatsächlich

$$\frac{d\,s^2}{d\,S^2} = \frac{\left(\frac{h}{2\,\pi}\right)^2 + r^2}{R^2}$$

Man erhält somit durch Integration obiger Gleichung und Zuordnung der Radien r_0 und R_0

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\sqrt{\left(\frac{h}{2\,\pi}\right)^2 + r^2} + r}{\sqrt{\left(\frac{h}{2\,\pi}\right)^2 + r_0^2} + r_0}.$$

Rechnet man aus der letzten Gleichung r als Funktion von R und setzt den erhaltenen Ausdruck in die Gleichungen

$$\psi = q^2 - \lg r$$

$$\varphi = \left(\frac{h}{2\,\pi}\right)^2 (\chi - q) - r^2\,q$$

ein, so erhält man die Polargleichungen der φ- und ψ-Linien der ebenen konformen Abbildung des in der χ-Fläche liegenden φ- und ψ-Netzes.

Die erhaltenen Gleichungen vereinfachen sich formell, wenn man die Länge von r_0 als Bezugseinheit für die Längen, also $r_0 = 1$, ferner $R_0 = r_0 = 1$ wählt und $\frac{h}{2\,\pi} = \operatorname{tg}\varepsilon$ setzt, dann folgt

$$R = \frac{\sqrt{\sin^2\varepsilon + r^2\cos^2\varepsilon} + r\cos\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon}$$

und hieraus für $r = 0$;

$$R = \Re = \frac{\sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon},$$

d. h. den Punkten auf der p (x)-Achse der χ-Fläche sind in der konformen Abbildung die Punkte des Parallelkreises mit dem Radius $\Re$ zugeordnet. Dieser Kreis sei mit Achsenkreis bezeichnet (siehe konf. Abbildung). Man erhält ferner

$$r = \frac{1 + \cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon} R - \frac{1 - \cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon} \frac{1}{R}$$

und hiermit

$$\psi = q^2 - \lg\left(\frac{1 + \cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon} \cdot R - \frac{1 - \cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon} \cdot \frac{1}{R}\right)$$

$$\varphi = (\chi - q)\,\mathrm{tg}^2\,\varepsilon - \left(\frac{1 - \cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon} \cdot R - \frac{1 - \cos\varepsilon}{2\cos\varepsilon} \frac{1}{R}\right)^2 \cdot q$$

als die gesuchten Polargleichungen der Linien des ebenen konformen φ- und ψ-Netzes, in welchem ψ und φ die Parameter der φ- und ψ-Linien sind und für χ die Konstante derjenigen χ-Fläche zu nehmen ist, deren Abbildung bestimmt werden soll. Fig. 26 stellt die ebene konforme Abbildung des Netzes der Fig. 24 dar; ψ, φ, χ sind Zahlenwerte in arithmetischer Reihenfolge, z. B.

$$\varphi = \psi = \chi = 0,\ 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75$$

oder mit Rücksicht auf eine im Kreise ganzzahlig aufgehende Teilung des Raumes durch ψ und χ-Flächen als Bruchteile von 2π entsprechend der Formel

$$\left.\begin{matrix}\varphi\\ \psi\\ \chi\end{matrix}\right| = \frac{2\pi n}{i},$$

wo i und n als ganze Zahlen zu wählen sind; q kann als Bogenkoordinate ebenso berechnet werden; setzt man also z. B.

$$\varphi = \frac{2\pi}{20} \cdot 2; \qquad \psi = \frac{2\pi}{20} \cdot 3; \qquad \chi = 0,$$

so gilt die Gleichung ψ für die dritte Linie ab der durch $\psi = 0$ bestimmten Anfangslage der ψ-Flächen, diejenige für φ für die zweite ψ-Linie ab der entsprechenden Anfangslage der φ-Fläche ($\varphi = 0$).

Die ebene Darstellung des χ- und φ-Netzes auf einer ψ-Fläche ergibt sich am einfachsten durch die Abwicklung derselben in eine Ebene, was bei gezeichneter Schnittlinie der ψ-Fläche mit der rq-Koordinatenebene leicht möglich ist, da die von einem Punkt aus gemessenen Längen dieser Linien als Abszissen für die Netzdarstellung zu nehmen sind, die Gleichung dieser Schnittlinien ist $\psi = q^2 - \lg r$,

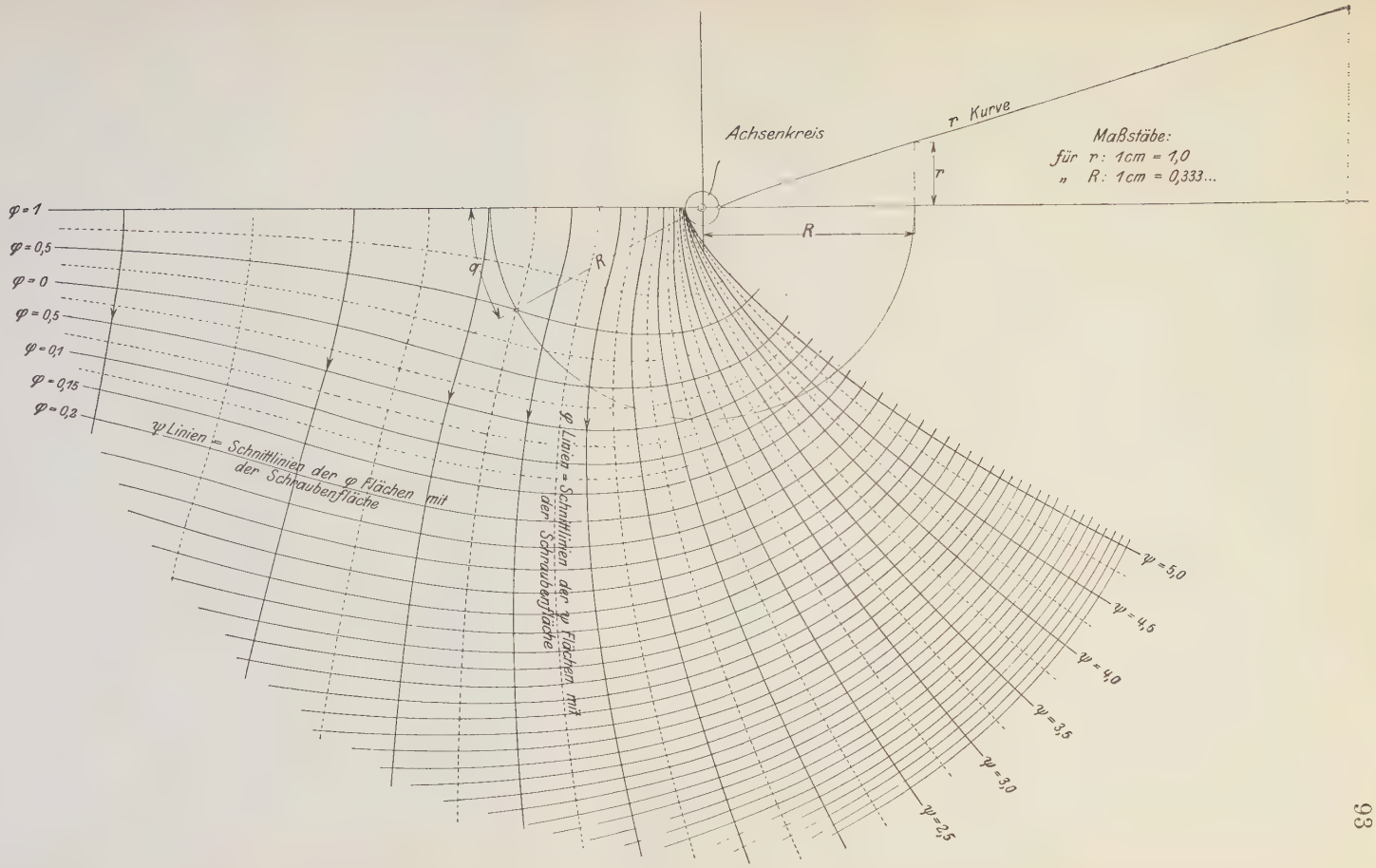
Achsenkreis
r Kurve
Maßstäbe:
für r: 1cm = 1,0
„ R: 1cm = 0,333...
r
R
φ
R
φ = 1
φ = 0,5
φ = 0
φ = 0,5
φ = 0,1
φ = 0,15
φ = 0,2
ψ Linien = Schnittlinien der φ Flächen mit der Schraubenfläche
φ Linien = Schnittlinien der ψ Flächen mit der Schraubenfläche
ψ = 5,0
ψ = 4,5
ψ = 4,0
ψ = 3,5
ψ = 3,0
ψ = 2,5

Fig. 26.

deren Gestalt für $\psi = 0$ gilt. Fig. 27. Aus den Koordinaten r und q der einzelnen Punkte derselben sind mit Hilfe der Gleichungen für q und χ die Werte der p-Koordinaten für die verschiedenen, in der betreffenden ψ-Fläche liegenden χ- resp. φ-Kurven zu rechnen und über die entsprechenden Abszissen Werte aufzutragen, wodurch das ebene $\chi\varphi$-Netz entsteht, Fig 28.

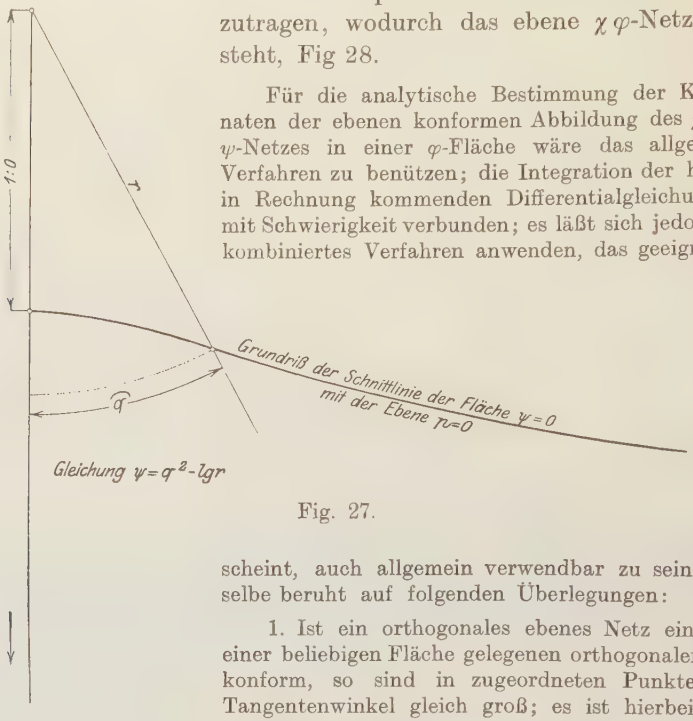

Fig. 27.

Für die analytische Bestimmung der Koordinaten der ebenen konformen Abbildung des χ- und ψ-Netzes in einer φ-Fläche wäre das allgemeine Verfahren zu benützen; die Integration der hierbei in Rechnung kommenden Differentialgleichung ist mit Schwierigkeit verbunden; es läßt sich jedoch ein kombiniertes Verfahren anwenden, das geeignet erscheint, auch allgemein verwendbar zu sein; dasselbe beruht auf folgenden Überlegungen:

1. Ist ein orthogonales ebenes Netz einem in einer beliebigen Fläche gelegenen orthogonalen Netz konform, so sind in zugeordneten Punkten die Tangentenwinkel gleich groß; es ist hierbei nicht notwendig, daß die Netze konforme Grundnetze sind, also der Tangentenwinkel konstant $= 45^0$ ist.

2. Gelingt es, den Tangentenwinkel als Funktion der Funktionswerte, der Netzlinien und die Funktionswerte durch die Koordinaten der abzubildenden Fläche darzustellen, so kann man mit den beschriebenen Methoden zuerst das ebene Netz konstruieren und dann die Koordinaten des Flächennetzes berechnen.

3. In beide Netze können dann konforme Figuren eingezeichnet werden.

Für den vorliegenden Fall ergibt sich folgendes Verfahren:

Wenn die Gleichung der φ-Flächen gegeben ist, so erhält man die Bestimmungsgrößen für orthogonale Netze in denselben, wenn man das gegebene System als erstes Leitflächensystem (X-Flächensystem) betrachtet und hierzu wie früher das Querschnittsflächensystem (Φ-Flächensystem) und das zweite Leitflächensystem (Ψ-Flächensystem) sucht; dem wird z. B. im gegebenen Fall entsprochen, wenn man setzt

$$X = \frac{h}{2\pi} p - r^2 q$$

$$\Phi = q + \frac{2\pi}{h} \cdot p; \quad \Psi = r$$

denn die Werte:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{2\pi}{h} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial p} = 0 \qquad \frac{\partial X}{\partial p} = \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{\partial \Phi}{r \cdot \partial q} = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial \Psi}{r \partial q} = 0 \qquad \frac{\partial X}{r \cdot \partial q} = -r$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 1 \qquad \frac{\partial X}{\partial r} = -2rq$$

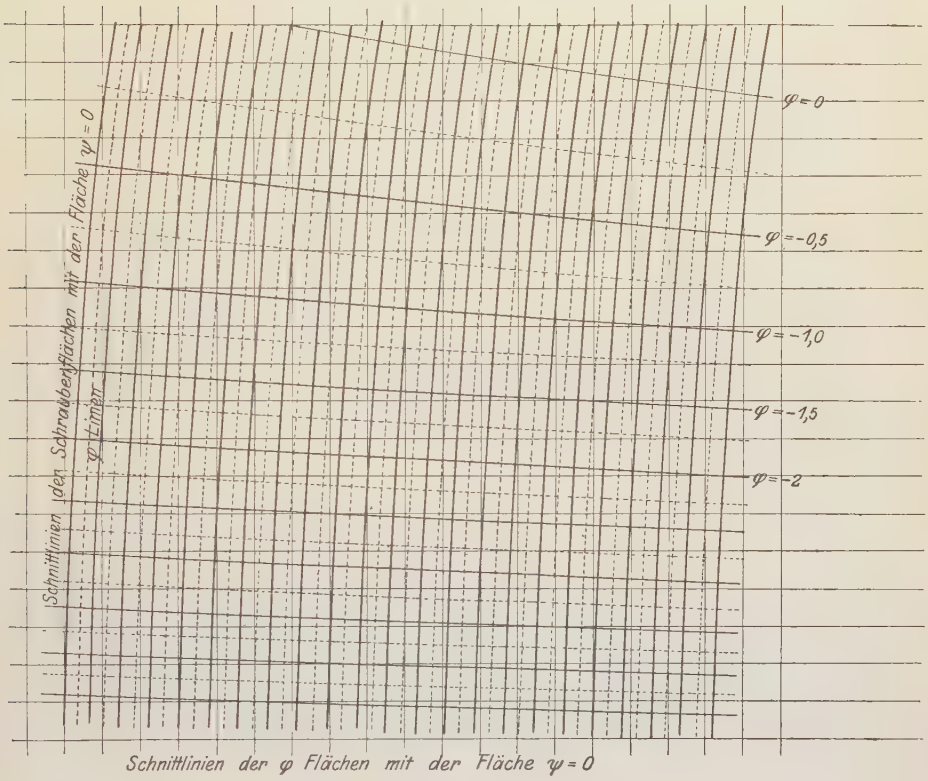

Fig. 28.

erfüllen die Gleichungen III_{az} und hiermit die gestellten Orthogonalitätsbedingungen; aus den Gleichungen IV_z' folgt mit diesen Werten

$$\frac{2\pi}{h} = +r\nu; \qquad \frac{1}{r} = \frac{h}{2\pi}\nu; \quad \text{und} \quad \nu = \frac{2\pi}{hr}.$$

Ferner erhält man

$$A = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 + r^2, \qquad B = 1, \qquad C = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2 + 4r^2q^2$$

$$\Delta s\Phi = \frac{1}{\sqrt{A}}\Delta\Phi; \qquad \Delta s\Psi = \nu\sqrt{\frac{C}{A}}\Delta\Psi; \qquad \Delta sX = \nu\sqrt{\frac{B}{A}}\Delta X$$

und speziell

$$\operatorname{tg}\tau = \nu\sqrt{C} = \frac{2\pi}{h\cdot r}\sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + r^2 + 4r^2q^2}$$

als Funktion von r und q.

Aus der Gleichung für X folgt:

$$p = \frac{2\pi}{h}(X + r^2 q);$$

es wird $\Phi = X + q(1 + r^2)$ und ergeben sich folgende Gleichungen für r, q und ν

$$r = \Psi, \qquad q = \frac{\Phi - X_0}{1 + \Psi^2}, \qquad \nu = \frac{2\pi}{h\Psi}$$

und somit innerhalb der X-Fläche mit dem Funktionswert

$$X = X_0:$$

$$A = \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 + \Psi^2; \qquad B = 1; \qquad C = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + \Psi + \frac{4\Psi}{1+\Psi^2}(\Phi - X_0)$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{2\pi}{h\Psi}\sqrt{\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 + \Psi + \frac{4\Psi}{1+\Psi^2}(\Phi - X_0)}$$

als Funktion von Ψ und Φ und dem Flächenfunktionswert X_0. Hiermit sind alle Formeln für die graphische Bestimmung festgestellt; dieselbe kann nun in folgender Weise erfolgen:

Man nimmt in der Ebene irgend eine beliebige gerade oder stetig gekrümmte Linie an, die man einer der Φ-Linien des räumlichen Netzes zuordnet, indem man derselben einen bestimmten Wert $\Psi = \Psi_0$ zuteilt; diese Linie unterteilt man durch Punkte, denen man die Werte einer arithmetischen Reihe also:

$$\Phi_0; \qquad \Phi_0 + \Delta\Phi_0; \qquad \Phi_0 + 2\Delta\Phi_0$$

zuteilt, in dem Sinne, daß dieselben die Schnittpunkte der Ψ-Kurven mit der angenommenen Φ-Linie sind; die Punktverteilung muß eine stetige, kann aber sonst beliebig sein; es entspricht nun jedem dieser Punkte ein Ψ-Wert, und ein Φ-Wert, aus denen mit Hilfe der letzten Gleichung für $\operatorname{tg}\tau$ die Diagonalen-Neigung gerechnet und nach dem in den früheren Beispielen angegebenen Verfahren die ersten Diagonalenelemente gezeichnet werden können, deren Schnittpunkte zwei Linien ergeben, denen die Funktionswerte $\Psi_0 + \frac{\Delta\Psi}{2}$ und $\Psi_0 - \frac{\Delta\Psi}{2}$ zukommen, wobei zu beachten ist, daß $\Delta\Psi = \Delta\Phi$ ist. Ferner kommen den durch die Diagonalenschnitte bestimmten Punkten dieser beiden Linien die Funktionswerte zu:

$$\Phi_0 + 3\frac{\Delta\Phi_0}{2}, \qquad \Phi_0 + 5\frac{\Delta\Phi_0}{2},$$

womit wieder die für dieselben geltenden Werte von $\operatorname{tg}\tau$ gerechnet und das Verfahren fortgesetzt werden kann; man erhält so das ebene Koordinatennetz, dessen Koordinatenlinien die Funktionswerte Φ und Ψ besitzen.

Mit Hilfe der für r und q gefundenen Gleichungen ergeben sich die Koordinaten der Netzlinien in der Fläche X_0; kennt man von einer Figur in dieser Fläche die Koordinatenwerte r und q, so kann man umgekehrt mit denselben Gleichungen die Koordinatenwerte Φ und Ψ der Figur im ebenen Netz berechnen und hiermit die konforme Abbildung der Figur im ebenen Netz zeichnen.

Wendet man dies für das Netz der dem Gleichungssystem a entsprechenden ψ, χ-Netzlinien in der Fläche $\varphi_0 = X_0$ an, so ist die Aufgabe der Netzbestimmung für dieses System vollkommen gelöst.

B. Kinematik stationärer Strömungen.

Aus der Gleichung XIII folgt, daß bei der verwendeten Raumteilung durch das Netz der φ, ψ, χ-Flächen bei $\Delta\varphi = \Delta\psi = \Delta\chi = \Delta\varepsilon$ = Konstant das Produkt

$$\frac{V\bar{A}}{\nu} \cdot \Delta f = \Delta\varepsilon^2,$$

für alle Querflächen-Elemente denselben Wert hat; multipliziert man die Gleichung mit einer im Stromgebiet konstanten Größe G und einer Funktion λ, deren Argumente die Funktionen ψ und χ sind, so daß also λ längs einer φ-Linie konstant bleibt, so folgt

$$G \frac{V\bar{A}}{\nu} \cdot \lambda \cdot \Delta f = G\lambda \cdot \Delta\varepsilon^2$$

d. h. das Produkt aus $G \frac{V\bar{A}}{\nu} \lambda$ in die Fläche Δf ist innerhalb eines elementaren Kanals des Stromgebietes konstant.

Erteilt man dem Wert G die Dimension einer Geschwindigkeit, wobei hinsichtlich der Länge dieselbe Bezugseinheit zu nehmen ist, mit der die Koordinaten gemessen werden, so kann man den Ausdruck

$$v = G \frac{V\bar{A}}{r} \lambda \quad \ldots\ldots\ldots \text{XVI}$$

als die Bestimmungsgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit im Stromgebiet φ, ψ, χ definieren; denn es wird dann

$$v \cdot \Delta f = G\lambda\Delta\varepsilon^2 = \Delta q \quad \ldots\ldots\ldots \text{XVII}$$

das Maß der durch einen elementaren Kanal fließenden sekundlichen Flüssigkeitsmenge; die φ-Linien sind die Bahnen der Strömung; die Komponenten von v ergeben sich für die kartesischen Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= G \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \\ v_y &= G \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \\ v_z &= G \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{XVIII}$$

für die Zylinderkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} v_p &= G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \\ v_q &= G \cdot \frac{\partial \varphi}{r \partial q} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \\ v_r &= G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\lambda}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{XVIII}_z$$

Die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \left(\text{resp. } \frac{\partial v_p}{\partial p} + \frac{\partial v_q}{r \partial q} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0\right)$$

wird tatsächlich durch obige Geschwindigkeitswerte erfüllt; es ergeben sich nämlich z. B. in kartesischen Koordinaten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{G}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \lambda - \frac{G}{\nu^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x} \cdot \lambda \\ &\quad + \frac{G}{\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{G}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \lambda - \frac{G}{\nu^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial y} \cdot \lambda \\ &\quad + \frac{G}{\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{G}{\nu} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \cdot \lambda - \frac{G}{\nu^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial z} \cdot \lambda \\ &\quad + \frac{G}{\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

und wird bei Addition derselben die rechte Seite unter Berücksichtigung der Gleichungen V_a und III_a gleich Null, somit auch

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Die Gleichung XVI ergibt mit v als Parameter die Darstellung der Flächen, zu denen sich diejenigen Punkte des Stromgebietes vereinigen, die gleiche Geschwindigkeit besitzen, dieselben seien als Isotachenflächen bezeichnet; deren Schnittlinien mit den φ-, ψ- und χ-Flächen ergeben hiermit die Isotachen in letzteren Flächen.

Sind λ und ν konstante Werte, so daß man den Wert $\frac{G\lambda}{\nu}$ als konstanten Faktor der Funktion φ ansehen, also $\Phi = \frac{G\lambda}{\nu} \varphi$ setzen kann, so erhalten die Komponenten-Gleichungen die Form

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \qquad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

es sind somit formell die Geschwindigkeitskomponenten solcher Strömungen in gleicher Weise als Abgeleitete der Funktion Φ zu bestimmen, wie dies hinsichtlich der Kraftkomponenten bei Bestand einer Kräftefunktion zu erfolgen hat; man bezeichnet eine solche Funktion Φ daher nach Helmholtz als das Geschwindigkeitspotential der Strömung und nennt derartige Strömungen Potentialströmungen.

Die Kontinuitätsgleichung nimmt die Form an:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XIX}$$

in kartesischen Koordinaten,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{r \partial q^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{XIX}_z$$

in Zylinderkoordinaten.

Es sind dies Strömungsformen, deren Querschnittsflächen durch die Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ zusammengefaßt sind.

Ist nur ν konstant, so daß man mit $\frac{G}{\nu} = k$

$$v_x = k\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad v_y = k\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad v_z = k\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

erhält, so ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung

$$k\left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)\lambda + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

wobei jedoch, da λ eine Funktion der Argumente ψ und χ ist, infolge der Gleichungen III_a der zweite Klammerausdruck identisch gleich Null wird, also wieder die Grundgleichung für die Querschnittsflächen resultiert:

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

d. h. solche Strömungen sind der Form nach identisch mit Potentialströmungen, aber nicht hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilung.

Z. B.: Die Parallelströmung in einem zylindrischen Rohr mit geradliniger Achse ist bei gleich großer Geschwindigkeit in sämtlichen Punkten des Strömungsgebietes eine Potentialströmung; die Parallelströmung mit parabolischer Geschwindigkeitsverteilung, wie solche unter dem Einfluß der Reibung in einem solchen Rohr eintreten kann, solange die mittlere Geschwindigkeit unter einer

bestimmten Grenze (dem kritischen Geschwindigkeitswert) bleibt, ist nur der Form nach eine Potentialströmung; dasselbe kann in einem solchen Rohr für die Hauptströmung bei turbulenter Bewegung der Fall sein.

Besitzt hierbei die Funktion λ nur eine der Funktionen χ und ψ als Argument, so kann die Geschwindigkeitsverteilung als eine geschichtete betrachtet, die Strömung als eine Schichtströmung bezeichnet werden, während man Strömungen, bei denen λ eine Funktion beider Argumente ψ und χ ist, als Fadenströmungen bezeichnen kann.

Die Darstellung der Schnittlinien der Isotachenflächen mit den φ-, ψ- und χ-Flächen gibt bereits ein Bild der Strömung.

Ein weiteres Bild erhält man, wenn man sich zur Zeit $t = t_0$ im Strömungsgebiet eine Fläche abgegrenzt denkt und dieselbe derart sich fortbewegen läßt, daß jeder ihrer Punkte in jeder seiner Lagen gerade diejenige Geschwindigkeit besitzt, die ihm vermöge der Geschwindigkeitsverteilung im Gebiet zukommt; es ergeben sich als geometrische Orte der Punkte nach gleichen Zeiten wieder Flächen und werden dieselben durch einen Funktionsausdruck darstellbar sein, der die Koordinaten x, y, z als Variable und die Zeit t als Parameter enthält. Die Bestimmung des Funktionsausdruckes dieses Flächensystems T wird vermittelt durch das System der drei simultanen Differentialgleichungen:

$$dx = v_x dt; \qquad dy = v_y dt; \qquad dz = v_z dt$$

oder

$$dt = \frac{dx}{v_x} \qquad dt = \frac{dy}{v_y} \qquad dt = \frac{dz}{v_z},$$

worin dx, dy, dz die Koordinatenelemente der Bahnlinie sind.

Wenn man für v_x, v_y, v_z die Ausdrücke aus Gleichung XVIII einsetzt, die in denselben als Funktionsausdrücke in x, y, z erscheinen, so ist im allgemeinen nicht sofort die Integration möglich.

Da aber jeder Punkt des Gebietes entweder durch seine Koordinaten oder durch die drei Funktionswerte φ, ψ, χ derjenigen Netzflächen bestimmt ist, die sich in ihm schneiden, so kann immer $x = X(\varphi, \psi, \chi)$; $y = Y(\varphi, \psi, \chi)$; $z = Z(\varphi, \psi, \chi)$ gesetzt, aus einer dieser Gleichungen φ berechnet und in die anderen eingesetzt werden, so daß dann irgend ein Funktionsausdruck in x, y, z in einen solchen in x, ψ, χ oder in y, ψ, χ oder in z, ψ, χ umgewandelt werden kann.

Hierdurch kann man erreichen, daß

v_x als eine Funktion von x, ψ, χ und λ
v_y „ „ „ „ y, ψ, χ „ λ
v_z „ „ „ „ z, ψ, χ „ λ

erscheint, so daß bei der Integration der simultanen Gleichungen ψ, χ und λ als Konstante zu betrachten sind, da dieselben eben längs einer Bahnlinie konstante Werte besitzen.

Mit der Zuordnung $t = t_0$; $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$ erhält man drei Funktionen zwischen x, x_0, t, t_0, ψ, χ, λ resp. y, y_0, t, t_0, ψ, χ, λ resp. y, y_0, t, t_0, ψ, χ und λ aus denen x_0, y_0, z_0 als Funktionen von x resp. y resp. z und ψ, χ, λ bestimmt werden können.

Ist nun $T(x_0, y_0, z_0) = 0$ der Funktionsausdruck für die Fläche des Systems zur Zeit $t = t_0$ — dieselbe wird in der Folge als Ausgangsfläche bezeichnet — so erhält man die Gleichung des Flächensystems, wenn man für x_0, y_0, z_0 die oben erhaltenen Funktionsausdrücke einsetzt und in denselben ψ, χ, λ wieder durch deren Koordinatenfunktionen ersetzt. (Siehe nachfolgende Beispiele.)

Durch geeignete Wahl der Ausgangsflächen und Abgrenzung bestimmt geformter Raumteile durch solche Fläche kann man, wie folgt, den Strömungsverlauf in verschiedener Weise veranschaulichen.

1. Beispiel: Fig. 29.

Die Formfunktionen seien (entsprechend dem Beispiel Seite 72)

$$\varphi = x^2 - y^2$$
$$\psi = 2xy$$
$$\chi = z.$$

Es werden hierbei:

$$\nu = 1 \quad a_1 = 2x \quad a_2 = -2y; \quad a_3 = 0; \quad A = 4(x^2 + y^2)$$

und bei der Annahme $\lambda = 1$: $v_x = 2Gx$; $v_y = -2Gy$; $v_z = 0$.

Man erhält die Isotachengleichung:

$$v = 4G\sqrt{x^2 + y^2} = 4Gr.$$

Die Isotachenflächen sind hiernach konzentrische Kreiszylinder um die Z-Achse mit den Halbmessern $r = \frac{v}{4G}$.

Das System simultaner Differentialgleichungen zur Bestimmung der Zeitfunktion wird

$$dt = \frac{dx}{2Gx}; \qquad dt = -\frac{dy}{2Gy}; \qquad dt = \frac{dz}{0}$$

und können dieselben in diesem Falle direkt integriert werden; man erhält

$$t - t_0 = \frac{1}{2G} \lg \frac{x}{x_0}; \qquad t - t_0 = -\frac{1}{2G} \lg \frac{y}{y_0}; \qquad 0 = z - z_0$$

und hieraus

$$x_0 = x e^{-2G(t-t_0)}; \qquad y_0 = y e^{+2G(t-t_0)}; \qquad z_0 = z.$$

Wird als Ausgangsfläche eine Kugel mit den Mittelpunktskoordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ und dem Radius $\mathfrak{r}$ angenommen, so daß die T-Funktion zur Zeit $t = t_0$ die Form erhält

$$(x_0 - \mathfrak{x}_0)^2 + (y_0 - \mathfrak{y}_0)^2 + (z_0 - \mathfrak{z}_0)^2 - \mathfrak{r}^2 = 0,$$

so ergibt sich als Gleichung des Flächensystems, durch das die im Laufe der Zeit stattfindende Deformation der Ausgangsfläche dargestellt wird, mit:

$$(x e^{-2G(t-t_0)} - \mathfrak{x}_0)^2 + (y e^{+2G(t-t_0)} - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 - \mathfrak{r}^2 = 0.$$

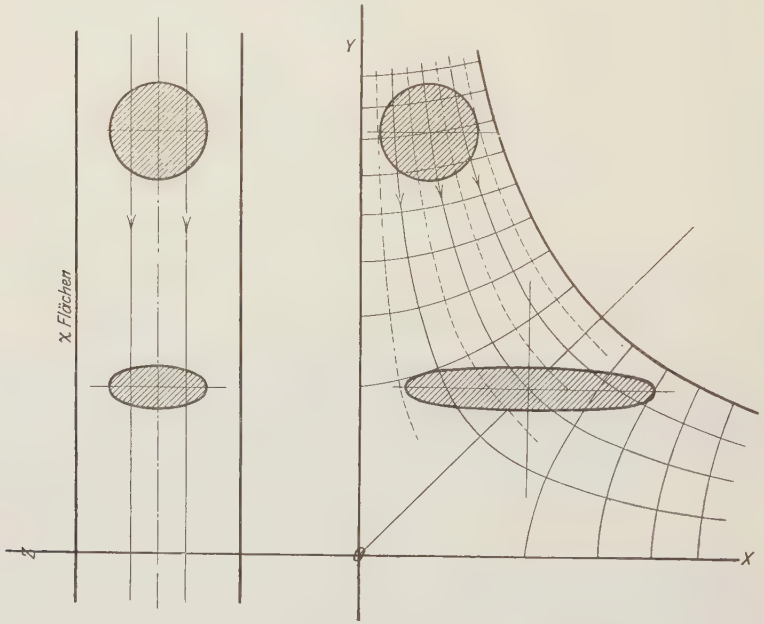

Fig. 29.

Dieser Gleichung entspricht eine Folge von Ellipsoiden; die Mittelpunktskoordinaten derselben sind

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 e^{+2G(t-t_0)}; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 e^{-2G(t-t_0)}; \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0.$$

Führt man die auf den jeweiligen Mittelpunkt als Koordinatenursprung bezogenen Koordinaten ξ, η, ζ mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$x = \xi + \mathfrak{x}; \quad y = \eta + \mathfrak{y}; \quad z = \zeta + \mathfrak{z},$$

ein, so erhält man

$$\xi^2 e^{-4G(t-t_0)} + \eta^2 e^{+4G(t-t_0)} + \zeta^2 - \mathfrak{r}^2 = 0$$

als Mittelpunktsgleichung der Ellipsoide; deren Hauptachsen sind parallel zu den Koordinatenachsen ξ, η, ζ, und (da die Transformationsgleichungen einer Parallelverschiebung des ursprünglichen Koordinatensystems entsprechen) auch parallel zu den Koordinatenachsen x, y, z.

Die Längen der Halbachsen der Ellipsoide sind

$$a = \mathfrak{r} e^{+2G(t-t_0)}; \qquad b = \mathfrak{r} e^{-2G(t-t_0)}; \qquad c = \mathfrak{r}.$$

Die a-Achse verlängert sich mit der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_a = \frac{da}{dt} = 2G\mathfrak{r} e^{-2G(t-t_0)},$$

die b-Achse verkürzt sich mit der Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_b = \frac{db}{dt} = 2G\mathfrak{r} e^{-2G(t-t_0)},$$

die c-Achse bleibt in der Länge unverändert.

Das Volumen des Ellipsoides ist

$$V = \tfrac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b \cdot c = \tfrac{4}{3}\pi \mathfrak{r} e^{+2G(t-t_0)} \cdot \mathfrak{r} e^{-2G(t-t_0)} = \tfrac{4}{3}\pi \mathfrak{r}^3,$$

also gleich dem Kugelvolumen; es findet also eine Volumänderung nicht statt.

Die Scheitelkoordinaten der Achsen sind

$$\begin{array}{lll} x_\xi = \mathfrak{x} \pm a & y_\xi = \mathfrak{y} & z_\xi = \mathfrak{z} \\ x_\eta = \mathfrak{x} & y_\eta = \mathfrak{y} \pm b & z_\eta = \mathfrak{z} \\ x_\zeta = \mathfrak{x} & y_\zeta = \mathfrak{y} & z_\zeta = \mathfrak{z} \pm c, \end{array}$$

deren wirkliche Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{array}{lll} v_{x\xi} = 2G(\mathfrak{x} \pm a) & v_{y\xi} = -2G\mathfrak{y} & v_{z\xi} = 0 \\ \quad = 2G(\mathfrak{x}_0 \pm \mathfrak{r}) e^{+2G(t-t_0)} & \quad = -2G\mathfrak{y}_0 e^{-2G(t-t_0)} & \\ v_{x\eta} = 2G\mathfrak{x} & v_{y\eta} = -2G(y \pm b) & v_{z\eta} = 0 \\ \quad = 2G\mathfrak{x}_0 e^{2G(t-t_0)} & \quad = -2G(\mathfrak{y}_0 \pm \mathfrak{r}) e^{-2G(t-t_0)} & \\ v_{x\zeta} = 2G\mathfrak{x} & v_{y\zeta} = -2G\mathfrak{y} & v_{z\zeta} = 0 \\ \quad = 2G\mathfrak{x}_0 e^{2G(t-t_0)} & \quad -2G\mathfrak{y}_0 e^{-2G(t-t_0)} & \end{array}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten des Mittelpunktes sind

$$v_{xm} = 2G\mathfrak{x} = 2G\mathfrak{x}_0 e^{+2G(t-t_0)} \qquad v_{ym} = -2G\mathfrak{y} = -2G\mathfrak{y}_0 e^{-2G(t-t_0)} \qquad v_{zm} = 0,$$

daher die relativen Geschwindigkeitskomponenten der Scheitel gegen den Mittelpunkt

$$\begin{array}{lll} w_{x\xi} = v_{x\xi} - v_{xm} & w_{y\xi} = v_{y\xi} - v_{ym} & w_{z\xi} = 0 \\ \quad = \pm \mathfrak{r} e^{+2G(t-t_0)} & \quad = 0 & \\ w_{x\eta} = v_{x\eta} - v_{xm} & w_{y\eta} = v_{y\eta} - v_{ym} & w_{z\eta} = 0 \\ \quad = 0 & \quad = \pm \mathfrak{r} e^{2G(t-t_0)} & \\ w_{x\zeta} = v_{x\zeta} - v_{xm} & w_{x\zeta} = v_{yz} - v_{ym} & w_{z\zeta} = 0 \\ \quad = 0 & \quad - 0 & \end{array}$$

die Scheitel in der ξ-Richtung besitzen der Größe nach eine Relativgeschwindigkeit gleich jener der Verlängerungsgeschwindigkeit der ξ-Achse, jene der η-Richtung eine solche der Verkürzungsgeschwindigkeit der η-Achse; die Scheitel in der ζ-Richtung bewegen sich relativ zum Mittelpunkt nicht, ebenso wie die Geschwindigkeit der Längenveränderung dieser Achse gleich Null ist; die Zeichen $\pm$ bei $w_{x\xi}$ und $\mp$ bei $w_{y\eta}$ geben die Richtung der Relativgeschwindigkeiten dieser Punkte in Beziehung auf das Koordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ an:

$$\text{zur Zeit } t = t_0 \text{ sind } \mathfrak{v}_a = +2Gr; \quad \mathfrak{v}_b = -2Gr; \quad \mathfrak{v}_c = 0,$$

mit diesen Geschwindigkeiten beginnt hiermit die Deformation in den Scheitelpunkten.

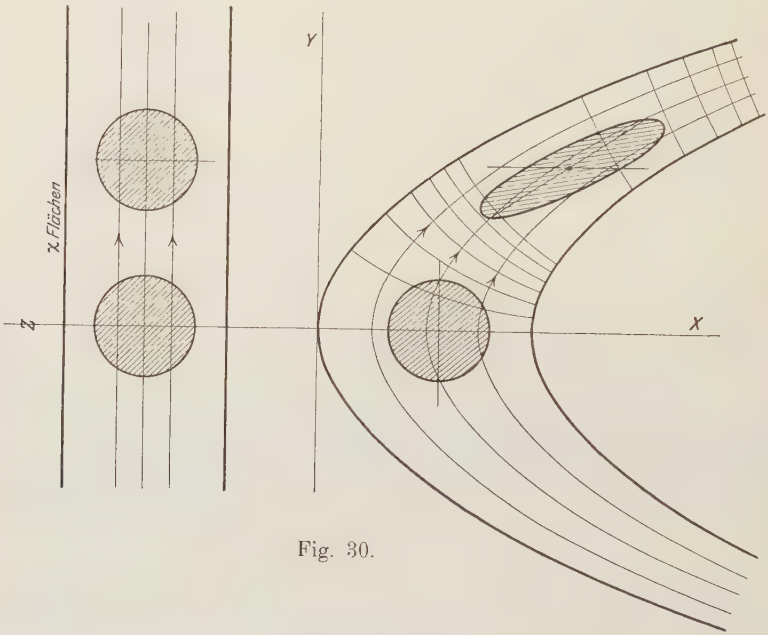

Fig. 30.

2. Beispiel. Fig. 30.

Die Formfunktionen seien entsprechend dem Beispiel Seite 78

$$\varphi = y\, e^{\mp kx}$$

$$\psi = \frac{k}{2}\, y^2 - x$$

$$\chi = z.$$

Es werden hierbei

$$\nu = e^{kx}; \qquad a_1 = ky\, e^{+kx}; \qquad a_2 = e^{kx}; \qquad a_3 = 0; \qquad A = (ky^2 + 1)\, e^{2kx}$$

und mit der Annahme $\lambda = 1$

$$v_x = Gky, \qquad v_y = G, \qquad v_z = 0.$$

Man erhält die Isotachengleichung

$$v = G\sqrt{k y^2 + 1},$$

die Isotachenflächen sind Ebenen parallel zur XOY-Koordinatenebene, ihr Abstand ist

$$y = \pm \frac{1}{k}\sqrt{\frac{v^2}{G} - 1}.$$

Das System simultaner Differentialgleichungen zur Bestimmung der T-Funktion wird

$$dt = \frac{dx}{Gky}, \qquad dt = \frac{dy}{dt}, \qquad dt = \frac{dz}{0}.$$

Aus der zweiten Formfunktion ergibt sich

$$y = \sqrt{\frac{2}{k}(\psi + x)}$$

und erhält man für die Integration der ersten Differentialgleichung

$$dt = \frac{dx}{Gk\sqrt{\frac{2}{k}(\psi + x)}},$$

worin ψ als Konstante erscheint; mit der Zuordnung $t = t_0$, $x = x_0$ wird

$$t - t_0 = \frac{1}{G}\left[\sqrt{\frac{2}{k}(\psi + x)} - \sqrt{\frac{2}{k}(\psi + x_0)}\right];$$

die beiden anderen Differentialgleichungen sind direkt integrierbar; man erhält

$$(t - t_0) = \frac{1}{G}(y - y_0); \qquad 0 = z - z_0.$$

Setzt man für ψ wieder den Funktionsausdruck ein, so wird

$$G(t - t_0) = y - \sqrt{y^2 - \frac{2}{k}(x - x_0)}$$

$$x - x_0 = k \cdot G(t - t_0)\, y - \frac{G^2}{2}(t - t_0)$$

und mithin

$$x_0 = x - kG(t - t_0)\, y + \frac{G^2}{2}(t - t_0)$$

$$y_0 = y - G(t - t_0)$$

$$z_0 = z.$$

Mit derselben Kugel als Ausgangsfläche erhält man als gesuchte Gleichung des Flächensystems die Gleichung zweiten Grades:

$$\left[x - kG(t-t_0)\,y + \frac{G^2}{2}(t-t_0) - \mathfrak{x}_0\right]^2 + [y - G(t-t_0) - \mathfrak{y}_0{}^2]^2 + [z - \mathfrak{z}_0]^2 - \mathfrak{r}^2 = 0.$$

Die Ausführung der angezeigten Quadrate und Ordnung ergibt die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_3a_1zx + 2a_1x + 2a_1y + 2a_3z + a = 0.$$

mit folgenden Konstanten:

$$a_{11} = 1; \qquad a_{22} = k^2G(t-t_0)^2 + 1; \qquad a_{33} = 1$$

$$a_{12} = -kG(t-t_0); \qquad a_{23} = 0; \qquad a_{31} = 0$$

$$a_1 = \frac{kG^2}{2}(t-t_0)^2 - \mathfrak{x}; \qquad a_2 = -\left[\frac{k^2G^3}{2}(t-t_0)^3 - kG(t-t_0)\,\mathfrak{x}_0 + G(t-t_0) + \mathfrak{y}_0\right]$$

$$a_3 = \mathfrak{z}_0; \qquad a = \left[\frac{kG}{2}(t-t_0)^2 - \mathfrak{x}_0\right]^2 + [G(t-t_0) + \mathfrak{y}_0]^2 + \mathfrak{z}_0{}^2 - \mathfrak{r}^2$$

und hiermit aus den Gleichungen

$$a_{11}\mathfrak{x} + a_{12}\mathfrak{y} + a_{13}\mathfrak{z} + a_1 = 0$$
$$a_{21}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y} + a_{23}\mathfrak{z} + a_2 = 0$$
$$a_{31}\mathfrak{x} + a_{32}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z} + a_3 = 0$$

die Mittelpunktskoordinaten

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + kG(t-t_0)\,\mathfrak{y} - \frac{kG^2}{2}(t-t_0)^2$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0 + G(t-t_0)$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0.$$

Das sind aber die Gleichungen der Bahnlinie des Punktes $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$, d. h. des Mittelpunktes der Kugel.

Mit den Transformationsgleichungen:

$$x = \xi + \mathfrak{x}; \qquad y = \eta + \mathfrak{y}; \qquad z = \zeta + \mathfrak{z}$$

erhält man in

$$[\xi - kG(t-t_0)\,\eta]^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \mathfrak{r}^2 = 0$$

oder

$$\xi^2 + [k^2G(t-t_0)^2 + 1]\,\eta^2 + \zeta^2 - 2kG(t-t_0)\,\xi\eta - \mathfrak{r}^2 = 0$$

die Mittelpunktsgleichung der deformierten Flächen; dieselben sind hiernach wieder Ellipsoide, wobei jedoch wegen Bestandes des Gliedes $-2kG(t-t_0)\,\xi\eta$ nur diejenige Hauptachse parallel verschoben wird, die der Z-Richtung entspricht, während die beiden andern Hauptachsen in ihrer Ebene, d. i. die im Abstand $\mathfrak{y}_0$ parallel zu XOY

liegenden Ebene um den Mittelpunkt verdreht sind; der Verdrehungswinkel α ist aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2}{kG(t - t_0)},$$

die Längen der Hauptachsen ergeben sich aus den Gleichungen:

$$a = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}_a}; \qquad b = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}_b}; \qquad c = \mathfrak{r},$$

mit $\mathfrak{g}^2_{\frac{a}{b}} = \frac{1}{2}\left\{[k^2 G^2 (t - t_0)^2 + 2]\right\} \pm \sqrt{[k^2 G^2 (t - t_0)^2 + 2)^2 - 4}$,
es wird

$$\mathfrak{g}_a^2 \cdot \mathfrak{g}_b^2 = 1$$

und mithin das Volumen des Ellipsoides

$$V = \frac{4}{3}\pi \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}_a} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{g}_b} \cdot \mathfrak{r} = \frac{4}{3}\pi \mathfrak{r}^3,$$

d. h. wieder konstant gleich dem Volumen der Kugel, also die Deformation ist wieder nicht mit Volumänderung verbunden.

Nun könnte man, wie früher, die Relativgeschwindigkeiten der Scheitelpunkte bestimmen, indem man die Koordinaten derselben sucht, in die Geschwindigkeitsformeln diese und die Mittelpunktskoordinaten einsetzt und die entsprechenden Komponenten subtrahiert; einfacher kommt man jedoch zum Ziel, wenn man berücksichtigt, daß im vorliegenden Fall die Komponenten der Geschwindigkeit in der y-Richtung im ganzen Strömungsgebiet denselben Wert G besitzen, die Relativkomponenten in dieser Richtung daher gleich Null sind; es wird die Relativgeschwindigkeit für irgendeinen Punkt mit der Ordinate y den Wert $G(y - \mathfrak{y})$ besitzen und parallel zur x-Achse liegen.

Es ist nun sofort ersichtlich, daß die Relativgeschwindigkeiten in den Scheitelpunkten nicht mehr, wie früher, in die Richtung der Hauptachsen fallen, da sie eben überall parallel zur x-Achse, die letzteren jedoch unter den Winkeln α resp. $90 + \alpha$ gegen die x-Achse geneigt sind; man kann aber in jedem Scheitel die zugehörige Relativgeschwindigkeit in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine in die Richtung der Hauptachse fällt, die andere dazu senkrecht ist; letztere Komponente besitzt dann gegenüber dem Mittelpunkt eine Winkelgeschwindigkeit.

Ist y_a die Ordinate des Endpunktes der a-Hauptachse, so wird in demselben

$$w = k\,G\,(y_a - \mathfrak{y}) = k\,G\,a \sin\alpha,$$

die Komponente in der Achsenrichtung ist

$$w_a = w \cos\alpha = G\,k\,a \sin\alpha \cos\alpha,$$

die dazu senkrechte Komponente w_{ta} ist

$$w_{ta} = w \sin\alpha = G\,k\,a \sin^2\alpha,$$

für die b-Hauptachse folgt

$$w_b = w \cos(90 + \alpha) = -G\,k\,b \sin\alpha \cos\alpha$$
$$w_{tb} = G\,k\,b \cos^2\alpha$$

und die Winkelgeschwindigkeiten

$$\left.\begin{aligned}\omega_a &= \frac{w_{at}}{a} = G\,k\sin^2\alpha\\ \omega_b &= \frac{w_{bt}}{b} = G\,k\cos^2\alpha\end{aligned}\right\}\quad \frac{\omega_a+\omega_b}{2} = \frac{G\,k}{2}.$$

Zur Zeit $t=0$ ist $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$; $\alpha = 45^0$; $a=b=\mathrm{r}$; $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

mithin

$$w_a = \frac{G\,k\,\mathrm{r}}{2}; \qquad w_b = -\frac{G\,k\,\mathrm{r}}{2}; \qquad w_c = 0$$

$$\omega_a = \frac{G\,k}{2}; \qquad \omega_b = \frac{G\,k}{2}; \qquad \omega_c = 0,$$

d. h. bei Beginn der Deformation findet in der Ebene $\frac{}{\delta 0}$ an den unter 45 und 225° gegen die X-Achse geneigten Radien eine Verlängerung derselben mit der Geschwindigkeit $+\frac{G\,k\,\mathrm{r}}{2}$ an den unter 135° und 215° geneigten Radien eine Verkürzung mit der Geschwindigkeit $-\frac{G\,k\,\mathrm{r}}{2}$ statt; gleichzeitig besitzen die Scheitelpunkte eine Winkelgeschwindigkeit in bezug auf den Kugelmittelpunkt im Betrage von $\frac{G\,k}{2}$, im Sinne einer Verkleinerung des Winkels α; derselbe ist unabhängig von den Längen der Achsen und ist daraus zu schließen, daß dieselbe Winkelgeschwindigkeit allen Punkten in den beiden Ebenen zukommt, die durch die zur Z-Achse parallele Hauptachse gehen und gegen die $Z\,0\,Y$-Ebene unter 45 resp. 135° geneigt sind; es unterliegt aber keinem Anstand, dieselbe Winkelgeschwindigkeit auch allen anderen Punkten der Kugelfläche zuzusprechen, die daraus für die einzelnen Punkte entstehenden Tangentialgeschwindigkeit als die eine Komponente der dem Punkte entsprechenden Relativgeschwindigkeit zu betrachten, die andere Komponente steht nun nicht mehr zur Tangentialkomponente senkrecht; bei dieser Zerlegung kann man der Kugel zur Zeit t_0 das Bestreben einer Drehung um die C-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω und das Bestreben einer Deformation zu einem Ellipsoid zusprechen, wobei die Deformationsgeschwindigkeit der einzelnen Punkte der Kugelfläche von deren Lage abhängig ist; es sei vorgreiflich noch bemerkt, daß die Größe der Winkelgeschwindigkeit ω gleich dem Betrag ist, der sich ergibt aus

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{G\,k}{2},$$

das Minuszeichen entspricht der angestrebten Verkleinerung von α.

In den bisherigen Beispielen ist der Wert von r keiner Beschränkung unterworfen; die Kugel deformiert sich bei jedem Wert von r in Ellipsoide, es ist dies eine Eigenschaft solcher Strömungsformen, bei denen x_0, y_0, z_0 lineare Funktionen nach x, y, z sind.

Letzteres ist jedoch allgemein nicht der Fall und nimmt daher auch im allgemeinen die Kugel mit endlichem Radius kompliziertere Formen beim Fortschreiten an.

3. Beispiel.

Bei einer Strömung in der Form des ersten Beispiels trete eine durch die Funktion λ bestimmte Geschwindigkeitsverteilung (Schicht- oder Fadenströmung) ein, es werden

$$v_x = 2 G x \lambda; \quad v_y = -2 G y \lambda; \quad v_z = 0.$$

λ ist nach früherem eine Funktion von χ oder von ψ oder von beiden zugleich und hat in jedem Falle längs einer Bahnlinie konstanten Wert.

Die Isotachengleichung erhält die Form

$$v = 2 G \lambda \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die simultanen Differentialgleichungen

$$dt = \frac{dx}{2 G x \lambda}, \qquad dt = -\frac{dy}{2 G y \lambda}, \qquad dt = \frac{dz}{0}$$

ergeben

$$x_0 = x e^{-2 \lambda G (t - t_0)}, \quad y_0 = y e^{+2 G \lambda (t - t_0)}, \quad z_0 = z$$

und mit derselben Kugel als Ausgangsfläche die Gleichung des Flächensystems

$$(x e^{-2 G \lambda (t - t_0)} - \mathfrak{x}_0)^2 + (y e^{+2 G (t \quad t_0)} - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 - \mathfrak{r}^2 = 0,$$

worin nun für λ der Funktionswert einzusetzen ist.

Nimmt man z. B. λ als eine Funktion von $\chi = z$ an, also etwa $\lambda = (z - z_1) \cdot (z - z_2)$, wobei z_1 und z_2 konstante Werte besitzen, so ergibt sich als Gleichung des Flächensystems

$$[x e^{-2 G (z - z_1)(z - z_2)(t - t_0)} - \mathfrak{x}_0]^2 + [y e^{+2 G (z - z_1)(z - z_2)(t - t_0)} - \mathfrak{y}_0]^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 - \mathfrak{r}^2 = 0,$$

die im allgemeinen nicht mehr eine Folge von Ellipsoiden darstellt.

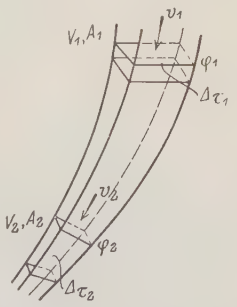

Fig. 31.

Von den allgemeinen Eigenschaften quantitativer Natur bleibt nur diejenige der Unveränderlichkeit des Volumens bestehen; diese Eigenschaft ist überhaupt nicht an eine bestimmte Ausgangsform gebunden, sondern gilt ganz allgemein, wie sich aus folgendem ergibt:

Es sei als Ausgangsform ein von je zwei benachbarten ψ- und χ-Flächen und zwei Querschnittflächen φ_1 und φ_2 begrenzter Kanal angenommen, Fig. 31. Nach Gleichung X besitzen die auf φ_1 resp. φ_2 abgegrenzten Flächen die Inhalte:

$$df_1 = \frac{\nu_1}{\sqrt{A_1}}\, d\psi\, d\chi$$

$$df_2 = \frac{\nu_2}{\sqrt{A_2}}\, d\psi\, d\chi .$$

Die Flächenelemente bewegen sich mit den Geschwindigkeiten

$$v_1 = G \cdot \frac{\sqrt{A_1}}{\nu_1} \quad \text{resp.} \quad v_2 = G \cdot \frac{\sqrt{A_2}}{\nu_2}$$

weiter, so daß von denselben im Zeitelement dt die Volumina

$$d\tau_1 = \frac{\nu_1}{\sqrt{A_1}}\, d\psi\, d\chi\, G \frac{\sqrt{A_1}}{\nu_1} \lambda \cdot dt; \quad d\tau_2 = \frac{\nu_2}{\sqrt{A_2}}\, d\psi \cdot d\chi \cdot G \frac{\sqrt{A_2}}{\nu_2} \lambda\, dt$$

durchlaufen werden; λ bleibt hierbei konstant; es ist also $d\tau_1 = d\tau_2$, der Inhalt des elementaren Kanals bleibt konstant; da nun der Inhalt jeder geschlossenen Fläche als Summe der Inhalte solcher Teilkanäle betrachtet werden kann, so ist die obige Behauptung erwiesen.

Die laufenden Koordinaten des Kugelmittelpunktes werden bei dessen Fortbewegung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0\, e^{+2G\lambda_0 (t-t_0)}; \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_0\, e^{-2G(t-t_0)}; \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_0$$

mit

$$\lambda_0 = (\mathfrak{z}_0 - z_1)(\mathfrak{z}_0 - z_2).$$

Nimmt man nun den Wert von r verschwindend klein an, dann können auch die relativen Koordinaten

$$\xi = (x - \mathfrak{x}); \quad \eta = (y - \mathfrak{y}); \quad \zeta = (z - \mathfrak{z})$$

als verschwindend klein angesehen werden und bei deren Einführung in die Ausdrücke für x_0, y_0 und z_0 diese als lineare Funktionen von ξ, η und ζ dargestellt werden; man erhält

$$\begin{aligned}\lambda &= (\zeta + \mathfrak{z}_0 - z_1)(\zeta + \mathfrak{z}_0 - z_2) = \zeta^2 + \zeta\,[2\,\mathfrak{z} - (z_1 + z_2)] + (\mathfrak{z}_0 - z_1)(\mathfrak{z}_0 - z_2) \\ &= \zeta^2 + \zeta\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 + z_2)] + \lambda_0\end{aligned}$$

und kann hierbei das Glied ζ^2 gegen die anderen Glieder vernachlässigen, also

$$\lambda = \lambda_0 + [2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 - z_2)]\,\zeta$$

$$e^{\pm 2G\lambda(t-t_0)} = e^{\pm 2G\lambda_0 (t-t_0)} \cdot e^{\pm 2G[(\mathfrak{z}_0 - (z_1 + z_2)](t-t_0)}$$

gesetzt werden; entwickelt man den zweiten Potenzausdruck in eine Reihe

$$\begin{aligned}&e^{\pm 2G[2\mathfrak{z}_0 - (z_1 - z_2)]\zeta (t-t_0)} \\ &= 1 \pm 2\,G\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 - z_2)]\,(t - t_0)\,\zeta + 4\,G^2\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 + z_2)\,(t - t_0)]^2 \cdot \frac{\xi^2}{2}\end{aligned}$$

und vernachlässigt auch hierin die Glieder ab ζ^2 als unendlich klein höherer Ordnung, so erhält man

$$e^{\pm 2G(t-t_0)} = e^{\pm 2G\lambda_0 (t-t_0)}\,\{1 \pm 2\,G\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 + z_2)]\,(t - t^0)\,\zeta\}$$

und hiermit

$$\lambda_0 = (\xi + \mathfrak{x})\, e^{-2G\lambda_0(t-t_0)} \cdot \{1 \pm 2\,G\,[2\,z_0 - (z_1 + z_2)]\,(t - t_0)\,\zeta\}$$
$$= \xi\, e^{-2G\lambda_0(t-t_0)} + \mathfrak{x}_0 - 2\,G\,[2\,Z_0 - (z_1 + z_2)]\,(t - t_0)\, e^{-2G\lambda_0(t-t_0)} \cdot \xi\,\zeta$$
$$- 2\,G\,[2\,z_0 - (z_1 + z_2)\,(t - t_0)]\,\mathfrak{x}_0\,\zeta,$$

das Glied mit $\xi\,\zeta$ kann wieder gegen die linearen Glieder vernachlässigt, also

$$x_0 = \mathfrak{x}_0 + \xi_0\, e^{-2G\lambda_0(t-t_0)} - 2\,G\,\mathfrak{x}_0\,[2\,z_0 - (z_1 + z_2)]\,(t - t_0)\,\zeta$$

gesetzt werden.

Ebenso erhält man

$$y_0 = \mathfrak{y}_0 + \eta\, e^{+2G\lambda_0(t-t_0)} + 2\,G\,\mathfrak{y}_0\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 + z_2)]\,(t - t_0) \cdot \zeta$$

und ferner

$$z_0 = \mathfrak{z}_0 + \zeta.$$

Die Ausdrücke für x_0, y_0 und z_0 sind nun linear und es ergibt sich als Gleichung des Flächensystems T mit:

$$\{\xi\, e^{-2G\lambda_0(t-t_0)} + 2\,G\,\mathfrak{x}_0\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 - z_2)]\,(t - t_0)\,\zeta\}^2$$
$$+ \{\eta\, e^{+2G\lambda_0(t-t_0)} + 2\,G\,\mathfrak{y}_0\,[2\,\mathfrak{z}_0 - (z_1 + z_2)]\,(t - t_0)\,\zeta\}^2$$
$$+ \zeta^2 - \mathfrak{r}^2 = 0,$$

die als Mittelpunktsgleichung von Ellipsoiden erscheint und mit $t = t_0$ in die Kugelgleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \mathfrak{r}^2 = 0$ übergeht; bei Entwicklung der angezeigten Quadrate erscheinen Glieder mit ξ^2, η^2, ζ^2, $\xi\,\zeta$, $\eta\,\zeta$, die dieselbe Größenordnung besitzen; man erkennt, daß in diesem Fall wieder zwei Hauptachsen a und b im Laufe der Zeit verschiedene Lagen annehmen daß jedoch alle ihre Länge ändern.

Es soll noch bemerkt werden, daß für eine solche verschwindend kleine Kugel, sofern ihr Mittelpunkt sich in der Ebene

$$z = \mathfrak{z}_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

befindet, die Gleichung des Flächensystems übergeht in

$$\xi^2\, e^{-4G\lambda_0(t-t_0)} + \eta^2\, e^{+4G\lambda_0(t-t_0)} + \zeta^2 - \mathfrak{r}^2 = 0.$$

Eine derart gelegene Kugel deformiert sich ohne Verdrehung, d. h. in der Ebene $\chi = \frac{z_1 + z_2}{2}$ und in unmittelbarer Nähe derselben ist die Deformation analog jener des ersten Beispieles.

Die weitere Verfolgung dieses Beispiels würde ergeben, daß bei Beginn der Deformation die Kugel das Bestreben einer Verdrehung mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um eine bestimmte Achse und gleichzeitig einer Deformation mit bestimmten Geschwindigkeiten der Längenänderung der Hauptachsen besitzt.

Die hiermit an drei Beispielen erörterten Deformationserscheinungen werden ganz allgemein für verschwindend kleine Lagen- und Formänderungen in der Theorie der linearen infinitesimalen Deformationen beschrieben und wird diesbezüglich auf die bestehende Literatur verwiesen, namentlich auf Helmholtz, Vorlesungen Bd. II, „Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen", 1. Teil, Seite 1—54; Weber, Heinrich, „Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik", Bd. I, 9. Abschnitt.

Die für die Orientierung über die Bewegungsvorgänge wichtigsten Resultate dieser Theorie sind folgende:

1. Die infinitesimale lineare Deformation eines verschwindend kleinen Raumelementes kann im allgemeinen als Superposition mehrerer Deformationen aufgefaßt werden.

2. In der Hydrodynamik wird insbesondere eine einheitliche Deformation als die Superposition einer Drehung und einer Dilatation (Dehnung) betrachtet. Die Drehung ist bestimmt durch die augenblickliche Lage der Drehachse des Elementes und der Winkelgeschwindigkeit um dieselbe oder wegen der Möglichkeit der Superposition durch die Winkelgeschwindigkeiten um drei zueinander senkrechten Drehachsen.

3. Werden letztere parallel zu den Koordinatenachsen angenommen, so sind die Winkelgeschwindigkeiten ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z um dieselben analytisch bestimmt durch die Ausdrücke

$$\vartheta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \text{Winkelgeschwindigkeit an der } x\text{-Achse}$$

$$\vartheta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \; y\text{-} \; \text{„}$$

$$\vartheta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \; z\text{-} \; \text{„}$$

4. Die Lage der resultierenden Drehachse des Elementes ist durch die Kosinuse der Richtungswinkel bestimmt, d. h.

$$\cos\alpha_x = \frac{\vartheta_x}{\sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}} \text{ gegen die } x\text{-Achse}$$

$$\cos\alpha_y = \frac{\vartheta_y}{\sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}} \quad \text{„} \quad \text{„} \; y\text{-} \; \text{„}$$

$$\cos\alpha_z = \frac{\vartheta_z}{\sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}} \quad \text{„} \quad \text{„} \; z\text{-} \; \text{„}$$

für die Quadratwurzeln ist hierbei das gleiche Vorzeichen zu nehmen.

5. Die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}.$$

6. Wird die Quadratwurzel in den Ausdrücken für die Kosinuse absolut und die positiven Koordinatenachsen nach Fig. 32 gerichtet angenommen, so entsprechen positiven Kosinuswerten rechtsdrehende Winkelgeschwindigkeiten ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z und ϑ gegenüber den positiven Richtungen der Koordinatenachsen und der resultierenden Drehachse.

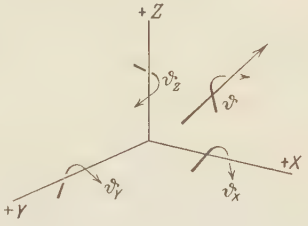

Fig. 32.

7. Die resultierende Winkelgeschwindigkeit wird gleich Null, d. h. die Deformation erfolgt ohne Drehung, wenn $\vartheta_x = 0$; $\vartheta_y = 0$; $\vartheta_z = 0$, also

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial v_y}$$

sind. Dies ist aber der Fall, wenn für die Geschwindigkeiten eine Potentialfunktion existiert, d. h. wenn

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

sind.

8. Hiermit ist die Grundlage für eine Klassifikatiou der Deformationen in solche ohne und solche mit Drehbewegung gegeben.

Die erste Klasse bilden die Strömungsformen mit $\nu = 1$ und $\lambda = 1$, d. h. die vollkommenen Potentialströmungen.

9. Die Dehnung erfolgt im allgemeinen derart, daß die Verbindungslinie irgend eines Punktes des betrachteten Elementes mit dessen Mittelpunkt eine Längenänderung und eine Lageänderung erfährt; es gibt jedoch jederzeit 3 Paare von Punkten, deren Verbindungslinien mit dem Mittelpunkt keine Lageänderung, sondern im allgemeinen nur Längenänderung erfahren; die Verbindungslinien dieser Punktpaare stehen aufeinander senkrecht und heißen die Hauptachsen der Dehnung. — In den durchgeführten Beispielen mit Kugeln als Ausgangsflächen sind dies die Hauptachsen der Ellipsoide, resp. die denselben entsprechenden Grenzlagen in den Kugeln.

10. Mit der Dehnung kann im allgemeinen eine Volumänderung verbunden sein; ist jedoch

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

so findet keine Volumänderung statt.

Es ist zu untersuchen, inwieweit diese Resultate der allgemeinen Theorie mit den Ergebnissen der Beispiele übereinstimmen.

Da in allen drei Fällen die letzte Gleichung erfüllt ist, so besteht darin Übereinstimmung, daß auch für dieselben Volumbeständigkeit gefunden wurde.

Die Kugelradien können auch in den beiden ersten Fällen verschwindend klein angenommen werden; im ersten Beispiel wurde gefunden, daß die Deformation der Kugel ohne Drehung vor sich geht; nun ist hierbei

$$v_x = -2Gx; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0; \quad v_y = -2Gy; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \quad v_z = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0.$$

mithin

$$\vartheta_x = \vartheta_y = \vartheta_z = \vartheta = 0;$$

die Deformation findet übereinstimmend ohne Drehung, sondern nur unter Dehnung der Kugel in Ellipsoide statt.

Im zweiten Beispiel ergab sich zur Zeit $t = t_0$ eine Deformation, die aus einer Drehung um eine Achse parallel zur Z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $-G\frac{k}{2}$ und einer Dehnung zu Ellipsoiden betrachtet werden könnte; in diesem Fall war

$$v_x = Gky; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = Gk; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0;$$

$$v_y = G; \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$v_z = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0,$$

mithin

$$\vartheta_x = 0; \quad \vartheta_y = 0; \quad \vartheta_z = -G\frac{k}{2}; \quad \vartheta_{abs} = G\frac{k}{2}.$$

Dies entspricht einer Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ϑ_z um eine zur Z-Achse parallele Drehachse; es besteht hiermit Übereinstimmung der Resultate der allgemeinen Theorie mit derjenigen des Beispiels für den Deformationszustand der Kugel bei Beginn der Deformation; im weiteren Verlauf findet die Deformation zwar unter weiterer Ausbildung von Ellipsoiden statt, hingegen sind die Winkelgeschwindigkeiten ω_a und ω_b beim Ellipsoid verschieden, so daß aus denselben eine Drehung des Ellipsoides nicht abgeleitet werden kann, wie dies bei der Kugel der Fall; es ist aber der Größe nach

$$\omega_m = \frac{\omega_a + \omega_b}{2} = \frac{Gk}{2}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{Gk}{2}$$

oder mit Berücksichtigung der Verkleinerung des Winkels bei fortschreitender Deformation $\omega_m = -\frac{Gk}{2}$ wieder gleich der aus der allgemeinen Theorie abgeleiteten Winkelgeschwindigkeit ϑ_z.

Es läßt sich nun auch zeigen, daß die Ausdrücke für ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z solche mittlere Winkelgeschwindigkeiten darstellen.

Aus nebenstehender Fig. 33 ist ersichtlich, daß

$$-\frac{v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\cdot\partial y - v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

der Größe und dem Drehungssinn nach die relative Winkelgeschwindigkeit des Punktes p' in bezug auf eine durch p parallel zur Z-Achse gehende Drehachse ist;

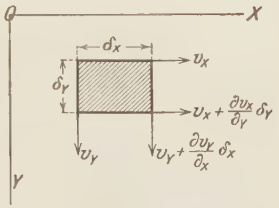

Fig. 33.

$$+\frac{v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx - v_y}{dx} = +\frac{\partial v_y}{\partial x}$$

hat dieselbe Bedeutung für den Punkt p'' und die gleiche Drehachse.

$$\vartheta_z = \frac{1}{2}\left[\left(+\frac{\partial v_y}{\partial_x}\right) + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

ist also das arithmetische Mittel beider Winkelgeschwindigkeiten; dasselbe gilt natürlich bezüglich der anderen Achsen.

Es besteht somit auch nach dieser Richtung Übereinstimmung zwischen den Resultaten des Beispiels und der allgemeinen Theorie; aus dieser Betrachtung geht jedoch deutlich hervor, daß die durch die Theorie bestimmten Winkelgeschwindigkeiten ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z im allgemeinen nicht einer wirklichen Drehung des Elementes entsprechen, sondern eben nur durch eine auf die Superpositionszulässigkeit gegründete und mathematisch mögliche Umschreibung des Deformationsvorganges entstanden sind.

Für das dritte Beispiel folgt mit

$$\lambda = (z - z_1)(z - z_2)$$

$$v_x = 2Gx(z - z_1)(z - z_2) = 2Gx[z^2 - z(z_1 - z^2) + z_1 z_2]$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial z} = +2Gx[2z - (z_1 + z_2)]$$

$$v_y = -2Gy(z-z_1)(z-z_2)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z} = -2Gy[2z-(z_1+z_2)]$$

$$v_z = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_x &= +Gy[2z-(z_1+z_2)] \\ \vartheta_y &= +Gx[2z-(z_1+z_2)] \\ \vartheta_z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \vartheta = G[2z-(z_1+z_2)]\sqrt{x^2+y^2}$$

Eine Winkelgeschwindigkeit um eine Achse parallel zur Z-Achse ist nicht vorhanden; die Neigung der resultierenden Drehachse gegen die Koordinatenachsen ist bestimmt durch die Gleichungen

$$\cos\alpha_x = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\alpha_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\alpha_z = 0.$$

Diese Drehachse liegt somit ständig parallel zur XOY-Ebene.

Diese Resultate der allgemeinen Theorie bezüglich der Größe und Richtung von ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z, ϑ, $\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$ sind unabhängig von der Form des Ausgangselementes und geben bei stationärem Zustand die Werte dieser Größen als Funktionen des Ortes an.

Bestimmt man sich hiermit die Gleichung derjenigen Linien, zu denen die den Punkten derselben entsprechenden Drehachsen Tangenten sind, so erhält man Linienscharen, deren einzelne Linien nach Helmholtz als Wirbellinien bezeichnet werden, eine aus solchen Wirbellinien gebildete Röhre heißt Wirbelröhre.[1])

Die Wirbellinienscharen sind allgemein durch das System simultaner Differentialgleichungen dargestellt

$$\frac{dx}{\cos\alpha_x} = \frac{dy}{\cos\alpha_y} = \frac{dz}{\cos\alpha_z} = ds$$

---

[1]) Die Bezeichnung stammt jedenfalls davon her, daß wirkliche Wirbel, wie solche in Flüssigkeiten vorkommen, immer eine Achse besitzen, um die die den Wirbel bildenden Flüssigkeitselemente kreisen; solche eigentliche Wirbel gehören allerdings zu denjenigen Strömungsformen, bei denen die Deformation eines Elementes unter Drehung erfolgt. Der Vergleich der beiden ersten Beispiele zeigt, daß bei der Strömungsform des zweiten Beispiels, dessen Bewegung nach der Bezeichnung von Helmholtz eine wirbelhafte ist, ebensowenig ein wirklicher Wirbel zu bemerken ist, als bei der wirbellosen Strömungsform des ersten Beispiels.

oder wenn man die Ausdrücke für die Kosinuse in den drei ersten Teilen einsetzt

$$\frac{dx}{\vartheta_x} = \frac{dy}{\vartheta_y} = \frac{dz}{\vartheta_z}.$$

Es folgt daher für das zweite Beispiel mit

$$\vartheta_x = 0, \quad \vartheta_y = 0, \quad \vartheta_z = 0$$

$$-Gkdx = 0, \qquad -Gkdy = 0$$

$$-Gkx = \text{konst.}, \quad -Gky = \text{konst.},$$

d. h. die Wirbellinien sind Gerade parallel zur Z-Achse; jede Wirbellinie bleibt daher auch beim Fortschreiten der Punkte, die sich zur Zeit t_0 auf derselben befunden haben, Wirbellinie.

Für das dritte Beispiel folgt:

$$\vartheta_x = Gy[2z - (z_1 + z_2)]$$

$$\vartheta_y = Gx[2z - (z_1 + z_2)]$$

$$\vartheta_z = 0$$

$$dz = 0 \qquad z = \text{konst.}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}; \qquad x^2 - y^2 = \text{konst.},$$

d. h. die Wirbellinien sind in diesem Falle die Schnittlinien der φ-Flächen mit den χ-Ebenen.

Untersucht man nun die Deformation einer solchen Schnittlinie, d. h. nimmt man als Gleichungen der, eine Wirbellinie zur Zeit $t = t_0$ bestimmenden Flächen

$$x_0^2 - y_0^2 = \varphi_0, \qquad z_0 = \chi_0 = \text{konst.}$$

und setzt hierin die dem Fortschreiten entsprechenden Werte für x_0 und y_0 ein, so erhält man

$$x^2 e^{-4G\lambda(t-t_0)} - y^2 e^{+4G\lambda(t-t_0)} = \varphi_0$$

und ist zu erkennen, daß die einzelnen φ-Flächen dieses Systems nicht mehr Querschnittsflächen bleiben, d. h. eine Linie, die zur Zeit $t = t_0$ Wirbellinie war, verliert bei ihrem Fortschreiten diese Eigenschaft.

Helmholtz hat bewiesen, daß Wirbellinien immer dann als solche mit den Punkten fortwandern, wenn die Massenkräfte, die im Strömungsgebiet wirksam sind, einer eindeutigen Kräftefunktion unterworfen sind.

Da dies beim dritten Beispiel nicht (wohl aber beim zweiten Beispiel) der Fall ist, so ist zu schließen, daß bei der Strömungs-

form mit Geschwindigkeitsverteilung nach dem dritten Beispiel die Existenz von Kräften, die nicht einer Kräftefunktion unterworfen sind, anzunehmen ist; zu solchen Kräften gehören die Bewegungswiderstände der Reibung und der Turbulenz.

Ein anderes Bild von den Strömungsvorgängen erhält man, wenn man die Deformation einer durch Querschnitts-(q-)Flächen abgegrenzten Schicht betrachtet.

Es genügt, für die hieraus anzuleitende Schlußfolgerung zwei typische Beispiele zu betrachten, nämlich die Strömung durch kreiszylindrische gerade Rohre bei einer Geschwindigkeitsverteilung einmal entsprechend der reibungslosen idealen Flüssigkeit, d. i. der Potentialströmung, das anderemal bei Schichtströmung unter dem Einfluß von Reibung.

Die Formfunktionen sind in Zylinderkoordinaten, mit der Bezeichnung z statt p

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= z \\ \psi &= r^2 \\ \chi &= q \end{aligned}\right\}$$

es wird hierbei

$$\nu = 2,$$

und da

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial q^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$$

ist, so hat die Strömung Potentialform.

Ferner werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0; \quad A = 1;$$

die Geschwindigkeitskomponenten der Potentialströmung sind

$$v_z = G; \qquad v_r = 0; \qquad v_q = 0; \qquad v = G,$$

es herrscht im ganzen Gebiet Strömung parallel zur p-Achse mit durchaus gleicher Geschwindigkeit.

Die Punkte jeder φ-Fläche bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit weiter; zwei sich gleichzeitig bewegende q-Flächen behalten ständig denselben Abstand; eine Deformation findet nicht statt.

Wie schon auf Seite 100 bemerkt, kann die Strömung durch ein gerades Rohr bei Bestand innerer Reibung ebenfalls als Parallelströmung betrachtet werden, bei der jedoch die Geschwindigkeit eine Funktion von r ist; wird mit r_a der lichte Radius des Rohres, d. i. der Radius der von Flüssigkeit benetzten Rohrwand bezeichnet, so ergibt sich für v der Ausdruck $v = G\,(r_a^2 - r^2)$.

Da $\psi = r^2$ ist, kann man $r_a^2 - r^2 = \psi_a - \psi$ setzen; es erscheint dann gemäß der Formel $v_z = v = G\,\frac{\sqrt{A}}{\nu}\cdot\lambda$ die Differenz $\psi_a - \psi$ als der Funktionsausdruck für λ; siehe hierüber Seite 114 u. f.

Die simultanen Differentialgleichungen für die Flächendeformation reduzieren sich auf die Gleichung

$$dt = \frac{dz}{G\,(\psi_a - \psi)},$$

es wird mit der Zuordnung

$$t = t_0; \qquad z = z_0; \qquad \varphi = \varphi_0$$
$$z - z_0 = G(\psi_a - \psi)(t - t_0) \text{ und hiermit}$$
$$z - z_0 = G(r_a^2 - r^2)(t - t_0),$$

die gesuchte Gleichung des Flächensystems, d. h. die Querschnittsflächen deformieren sich zu Rotationsparaboloiden, deren Scheitel in der Rohrachse liegen, die jedoch immer durch denjenigen Kreis gehen, der dem Schnitt der Rohrfläche mit der φ_0-Ebene entspricht; denkt man sich eine benachbarte φ-Fläche gleichzeitig bewegt, so ändert sie sich in gleicher Weise; es bleibt die Dicke der Schicht gemessen in der Z-Richtung wohl konstant; aber normal zu den deformierten Flächen gemessen wird die Dicke im Laufe der Zeit um so kleiner, je näher gegen die Rohrwand hin dieselbe gemessen wird.

Durch diese Deformation lassen sich aber auch die von Reynolds erhaltenen Turbulenzerscheinungen und der Bestand einer kritischen Geschwindigkeit erklären, namentlich unter Berücksichtigung der gefundenen Tatsache, daß die Erscheinung der Turbulenz bei ruhigem Zufluß immer erst in relativ großem Abstand von den Zuflußmündungen tritt; es wird eben, wenn die Deformation weit genug vorgeschritten ist, der Zusammenhang der deformierten Schicht gestört und findet ein Austausch von Flüssigkeit statt, der die turbulente Bewegung erzeugt, die mit der Hauptströmung mitschreitet.

Es ist weiter noch folgender Schluß zu ziehen: Strömungserscheinungen mit lokal großem Richtungswechsel sind mathematisch wohl auch darstellbar, da aber jedenfalls bei solchen Strömungen die Deformationen relativ sehr groß werden, so ist es einerseits unzulässig, die Theorie der infinitesimalen Deformation bloß auf lineare Änderungen zu beschränken, anderseits läßt die Größe der Deformation auf erhöhte Möglichkeit von Turbulenz, also darauf schließen, daß die Größenordnung der turbulenten Strömung an diejenige der Hauptströmung herankommt und demgemäß der mathematischen Behandlung vorläufig eine Grenze setzt; für die Erkenntnis solcher Strömungserscheinungen steht zurzeit nur der Versuch zur Verfügung.

Die graphische Darstellung der Isotachenflächen und der deformierten Flächen bietet an sich keine Schwierigkeiten; es wird sich hierfür die Einzeichnung der Schnittlinien in die ψ- und χ-Flächen am besten eignen, die dann, wenn diese Flächen krumme Flächen sind, mittels der konformen Abbildung in der Ebene erfolgen; man kann diese Schnittlinien bei gegebenem konformen Strömungsnetz auch konstruieren, hat dabei jedoch zu berücksichtigen, daß die Geschwindigkeit, die im konformen Netz einem bestimmten Punkt zukommt, gleich ist der Geschwindigkeit des zugeordneten Punktes in der Fläche selbst, dividiert durch die Ähnlichkeitszahl, die diesem Punktpaar entspricht.

Die bezügliche Rechnungsmethode ist im Anhang erläutert.

C. Dynamik stationärer Strömungen.

Es werden die auf Seite 20 angegebenen allgemeinen Bewegungsgleichungen I_w, II_w, III_w benützt, aus denen jedoch wegen des stationären Zustandes die partiellen Ableitungen nach der Zeit ausfallen.

K_x, K_y, K_z sind die Komponenten der Schwerkraft pro Masseneinheit, mithin der Größe nach bestimmt durch die Projektionen von g auf die Koordinatenachsen, es wird $K_x dx + K_y dy + k_z dz = -g dh$, wenn mit dh die geodätische Höhendifferenz der Endpunkte des Längenelementes $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ bezeichnet wird. (Die Kräftefunktion der Schwerkraft ist $-gh$.)

Bezüglich der Beschleunigungen W_x, W_y, W_z sei vorläufig nur angenommen, daß dieselben von den Bewegungswiderständen herrühren sollen; dieselben werden dementsprechend mit negativen Vorzeichen eingesetzt werden; für die ideale, widerstandsfreie Bewegung sind $W_x = W_y = W_z = 0$ zu setzen.

p sei allgemein als ein Mittelwert der Pressung im Punkte x, y, z mit der Eigenschaft angenommen, daß derselbe eine stetige Funktion der Ortskoordinaten sei, so daß

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

zu setzen ist; bei der widerstandsfreien Bewegung hat p gleichen Wert für alle durch den Punkt gezogenen Richtungen.

$\varrho = \frac{\gamma}{g}$ wird wie auch bereits in der Kontinuitätsgleichung auf Seite 98 konstant angenommen, d. h. es wird die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit als verschwindend klein vernachlässigt.

Es wird im allgemeinen turbulente Bewegung vorausgesetzt; die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z der Hauptbewegung und hiermit auch die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

werden ebenfalls als stetige Funktionen der Ortskoordinaten angenommen, entsprechend

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz \quad \text{usw.}$$

Bei widerstandsfreier Bewegung und Strömungen ohne Turbulenz sind dies die den einzelnen Punkten direkt zukommenden Geschwindigkeiten.

Zur Abkürzung sei ferner in den Ausdrücken XVI und XVIII $\frac{\lambda}{\nu} = \mu$ gesetzt und der jeweilige Funktions-Ausdruck für μ als Wirbelfunktion bezeichnet.

Man erhält dann aus den Gleichungen XX durch Einsetzen

$$\begin{aligned} 2\vartheta_x &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(G\mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(G\mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ &= G\mu\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \cdot \partial z}\right) + \left(G \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - G\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \\ &= \frac{v_z}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{v_y}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \end{aligned}$$

und Analoges für die beiden andern Gleichungen; hiermit folgt zusammengestellt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{v_z}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{v_y}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{v_x}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{v_z}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{v_y}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{v_x}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{XXI}$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen können die Bewegungsgleichungen umformt werden[1]); es ergibt sich das Gleichungssystem:

[1]) $$\begin{aligned} K_x - W_x - \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{v_y}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{v_x}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \\ &+ v_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{v_x}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{v_z}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \\ \left(v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) &- \left(\frac{v_y^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{v_z^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \\ &+ \left(\frac{v_x v_y}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{v_x v_z}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Es wird hierin

$$v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + \frac{v_z^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{v^2}{2}\right)$$

und man erhält nach Addition der Identität

$$\frac{v_x^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{v_x^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

auf der rechten Seite zusammengefaßt:

$$K_x - W_x - \frac{G}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{v_x}{\mu}\left(v_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} K_x - W_x - \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x} - G^2\mu^2\nabla^2\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ K_y - W_y - \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y} - G^2\mu^2\nabla^2\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ K_z - W_z - \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial z} - G^2\mu^2\nabla^2\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{XXII}$$

Multipliziert man die Gleichungen der Reihe nach mit dx, dy, dz und addiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &-g\,dh - (W_x dx + W_y dy + W_z dz) - \frac{g}{\gamma}dp \\ &= d\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{\mu}\cdot d\mu - G^2\mu^2\nabla^2\varphi\, d\varphi . \end{aligned}$$

Wenn man im vorletzten Glied v^2 durch $G^2\mu^2 A$ ersetzt, erhält man schließlich nach entsprechender Ordnung:

$$\begin{aligned} &\frac{g}{\gamma}d p + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + g\,d h + [(W_x d x + W_y d y + W_z d z) \\ &\quad - G^2\mu\,(A\,d\mu + \mu\,\nabla^2\varphi\, d\varphi)] = 0 \end{aligned} \quad \text{XXIII}$$

die hydrodynamische Grundgleichung, aus der gegenseitige Eigenschaften der Funktionen gefunden werden können, die zur Erfüllung der Gleichung und hiermit der dynamischen Bedingungen nötig sind.

In dieser Gleichung beziehen sich die Differentiale auf die Änderung beim Übergang längs eines beliebigen Linienelementes des Strömungsgebietes; es besteht hiermit die mathematische

---

das letzte Glied dieser Gleichung kann durch Einsetzen der Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten und für μ weiter umformt werden; man erhält

$$\begin{aligned} &\frac{v_x}{\mu}\left(v_x\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x} + v_y\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y} + v_z\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z}\right. \\ &= G\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[G\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\right] \\ &= G^2\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left[\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) - \frac{\lambda}{\nu^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)\right], \end{aligned}$$

da λ eine Funktion von ψ und χ ist, so wird der erste Ausdruck unter der Klammer identisch gleich Null; ferner ist nach Gleichung V

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial z}\right),$$

somit

$$\frac{v_x}{\mu}\left(v_x\frac{\partial\mu}{\partial x} + v_y\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y} + v_z\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z}\right) = -G^2\mu^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\nabla^2\varphi .$$

Grundbedingung, daß der Ausdruck unter der eckigen Klammer ein totales Differential sein muß.

Wenn auf Grund einer Erkenntnis über das Wesen und die Größenverteilung der Widerstände W_x, W_y, W_z als Funktionen der anderen in der Gleichung XXIII vorkommenden Größen bekannt sind, so muß durch die Funktionen μ und φ die obige Bedingung erfüllt werden; wenn andererseits μ und φ gegeben sind, so müssen W_x, W_y, W_z in erster Linie so bestimmt werden, daß die mathematische Bedingung erfüllt ist, dann aber ist zu untersuchen, ob diese so erhaltenen Werte dieser Größen mit den bisherigen theoretischen und experimentellen Erfahrungen in Einklang zu bringen sind.

Die im ersten Kapitel angegebenen Gleichungen über die Bewegung viskoser Flüssigkeiten, ferner die von Reynolds und Lorentz bei Untersuchung der turbulenten Bewegung erhaltenen Gleichungen haben sich durch Einführung der Reibungshypothese von Newton in die Fundamentalgleichungen ergeben.

Es wird im folgenden der zweite Weg eingeschlagen und versucht werden, konkrete Fälle zur Beurteilung der Verwendbarkeit der gewonnenen Resultate durch Vergleich mit denjenigen der obengenannten klassischen Untersuchungen oder von Experimenten herbeizuziehen.

I. Die hydraulische Grundgleichung.

Bezieht man die Differentiale auf ein Bahn-Element, so verschwindet der Ausdruck $(A\,d\mu + \mu\nabla^2\varphi\,d\varphi)$, wie sich aus folgendem ergibt:

Setzt man in

$$A\,d\mu = A\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\mu}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\mu}{\partial z}\,dz\right)$$

die Werte von dx, dy, dz aus dem Schema VII ein, d. h.

$$dx = \frac{\alpha_1}{A}\,d\varphi \text{ usw.},$$

so folgt:

$$A\,d\mu = \left(\alpha_1\frac{\partial\mu}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\mu}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)d\varphi,$$

mit $\mu = \frac{\lambda}{\nu}$ werden $\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\lambda}{\nu^2}\frac{\partial\nu}{\partial x}$ und somit

$$A\,d\mu = \left[\frac{1}{\nu}\left(\alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) - \frac{\mu}{\nu}\left(\alpha_1\frac{\partial\nu}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\nu}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)\right],$$

nach früherem ist jedoch der Ausdruck unter der ersten runden Klammer identisch $= 0$ und im zweiten Ausdruck wird nach Gleichung V $\frac{1}{\nu}\left(\alpha_1\frac{\partial\nu}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\nu}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\nu}{\partial z}\right) = \nabla^2\varphi$, so daß also

$$A\,d\mu - \mu\nabla^2\varphi\,d\varphi = 0$$

wird, was zu beweisen war.

Nun ist auch am Bahnelement

$$dx = ds_\varphi\cos(sX), \qquad dy = ds_\varphi\cos(sY), \qquad dz = ds_\varphi\cos(sZ),$$

dies in das Trinom der Widerstandskomponenten eingesetzt und

$$W_x\cos(sX) + W_y\cos(sY) + W_z\cos(sZ) = W_s$$

gesetzt, gibt

$$\frac{g}{\gamma}\,dp + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + g\,dh + W_s\,ds_\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXIII}_h$$

Diese Gleichung stellt die Beziehungen zwischen p, v, h und W_s nur für den die Bahn unmittelbar umgebenden elementaren Kanal dar, wird aber in der praktischen Hydraulik auch für Kanäle mit größerem als elementarem Querschnitt verwendet und kann somit als die hydraulische Grundgleichung stationärer Strömungen bezeichnet werden; sie ist die Energiegleichung für die Masseneinheit der pro Sekunde durchströmenden Flüssigkeit.

Integriert und durch g dividiert ergibt dieselbe mit der Zuordnung $s_\varphi = s_0, \quad h = h_0, \quad p = p_0, \quad v = v_0$

$$\left(\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right) + \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}\right) + (h - h_0) + \int_{s_0}^{s}\frac{W_s}{g}\,ds_\varphi = 0\,. \quad \text{XXIII}_h$$

die Grundform der Bernouillischen Bewegungsgleichung, auf der das ganze Gebiet der praktischen Hydraulik, soweit dasselbe die Strömung in festliegenden Kanälen betrifft, aufgebaut ist; der Wert des Integrales ist durch das Experiment für verschiedene Querschnittsformen festgelegt, indem hierfür die empirischen Formeln bestimmt wurden, die in der Einleitung angegeben sind.

Sie wird nach wie vor entweder in ihrer Form als Differentialgleichung oder integriert überall dort mit Erfolg angewendet werden, wo es sich um die Bestimmung von mittleren Strömungszuständen und auf die Wirkung der strömenden Masse als Ganzes ankommt und daher die Form der Strömung von untergeordnetem Einfluß ist,

resp. die durch Störungen der Strömungsform verursachten Bewegungswiderstände durch entsprechende Anpassung des Wertes von W_s genügend berücksichtigt werden können.

II. Widerstandsfreie Strömung.

Das Fehlen von Widerständen ist durch Ausfall der Größen W_x, W_y, W_z, aus der Gleichung XXIII, also mit $W_x = 0$; $W_y = 0$; $W_z = 0$ berücksichtigt.

a) Vollkommene Potentialströmung.

Eine vollkommene Potentialströmung tritt (siehe Seite 99) ein, wenn die Formfunktion φ der Gleichung entspricht: $\nabla^2 \varphi = 0$ und wenn $\lambda = 1$ ist; die Gleichung XXIII nimmt die Form an

$$\frac{g}{\gamma} dp + d\frac{v^2}{2} + g\,dh = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXIII}_p$$

enthält hiermit nur totale Differentiale; vollkommene Potentialströmung kann daher widerstandsfrei sein. Integriert und mit g dividiert ergibt die letzte Gleichung mit der Zuordnung h_0, p_0, v_0

$$\left(\frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma}\right) + \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}\right) + h - h_0 = 0.$$

Dieselbe gilt nun aber nicht nur längs der Bahnlinie, sondern zwischen beliebigen Punkten des Strömungsgebietes und bedeutet, daß die Summe der Pressungsenergie, der kinetischen Energie und der potentiellen Energie der Masseneinheit der pro Sekunde durchströmenden Flüssigkeit im ganzen Raum konstant ist.

Die Gleichung XXIII_p ist also die Grundgleichung der stationären vollkommenen Potentialströmung.

Die klassische Hydrodynamik hat in weitem Umfang die Erscheinungen der Potentialströmung untersucht und Methoden für die Bestimmung von Strömungsformen und die damit verbundenen Erscheinungen angegeben, die naturgemäß auf den Gesetzen der Potentialtheorie basieren.

Es wird an dieser Stelle auf die reiche Literatur in den Lehrbüchern der Hydrodynamik verwiesen; bei der Behandlung von Spezialproblemen wird unter entsprechender Erörterung hiervon Gebrauch gemacht werden.

Nach Formel XII, Seite 61, besteht zwischen den Seitenlängen von Potentialströmungsnetzen mit $\nu = 1$ die Beziehung

$$\Delta s_\varphi : \Delta s_\psi : \Delta s_\chi = 1 : \sqrt{C} : \sqrt{B},$$

die als Grundlage für die graphische Darstellung solcher Netze dienen kann; weiter gibt Gleichung XIII, mit $\nu = 1$ in

$$\Delta f = \frac{\Delta \varepsilon^2}{\sqrt{A}}$$

ein Maß der elementaren Querschnittsflächen; da weiter durch jeden elementaren Kanal des Netzes dieselbe Flüssigkeitsmenge durchströmt, so ist aus derselben und dem Werte von Δf die Strömungsgeschwindigkeit in allen Teilen des elementaren Kanals einfach zu bestimmen.

Die geometrischen Orte der Punkte mit gleichen Geschwindigkeitswerten bilden die Isotachenflächen und entsprechend der Gleichung

$$\frac{p}{\gamma} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} + h_0\right) - \left(\frac{v^2}{2g} + h\right),$$

worin p_0, v_0, h_0 dem Punkte x_0, y_0, z_0 zugeordnet sind, die geometrischen Orte der Punkte gleicher Werte von $\left(\frac{v^2}{2g} + h\right)$ die Flächen gleicher Pressung, mithin die Niveauflächen der Strömung.

b) Widerstandsfreie Wirbelströmungen.

Dieselben sind dadurch charakterisiert, daß μ eine Funktion der Ortskoordinaten ist; es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1.\ \nu = 1; \qquad \mu = \lambda; \qquad 2.\ \lambda = 1; \qquad \mu = \frac{1}{\nu}.$$

1. Fall: $\mu = \lambda =$ eine Funktion von ψ und χ (oder von ψ resp. χ allein). Die Gleichung XXIII erhält die Form:

$$\frac{g}{\gamma} dp + d\frac{v^2}{2} + g\,dh - G\,\lambda\,A\,d\lambda = 0.$$

Führt man

$$v = G\sqrt{A}\cdot\lambda; \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{G^2}{2} A\lambda^2$$

ein, so folgt

$$d\frac{v^2}{2} = G^2\lambda\,G\,d\lambda + \frac{G^2\lambda^2}{2} dA$$

und hiermit

$$\frac{g}{\gamma} dp + g\,dh - \frac{G^2\lambda^2}{2} dA = 0,$$

da nun dp, dh und dA gemäß ihrer Einführungsweise bereits totale Differentiale sind, so kann λ nur eine Konstante sein, d. h. bei wider-

standsfreier Bewegung kann eine stationäre Potentialströmung nur eine vollkommene Potentialströmung sein.

2. Fall: $\lambda = 1$; $\mu = \frac{1}{\nu}$ die Strömungsformen entsprechen der allgemeinen Form der Gleichung V, d. i.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial z}\right)$$

die Gleichung XXIII erhält die Form

$$\frac{g}{\gamma}\,dp + d\frac{v^2}{2} + g\,dh - G^2\left[\frac{A}{2}\,d\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \frac{1}{\nu^2}\,\nabla^2\varphi\cdot d\varphi\right] = 0 \quad \text{XXIII}_r$$

Der Klammerausdruck muß ein totales Differential sein, d. h. von den durch die allgemeine Gleichung V bestimmten Strömungsformen sind bei widerstandsfreier und stationärer Bewegung nur solche Formen möglich, die auch der eben aufgestellten Bedingung genügen.

Untersucht man z. B. die Strömungsform des zweiten Beispiels, wo

$$\varphi = y\,e^{kx}, \quad \psi = \frac{k}{2}\,y^2 - x, \quad \chi = z, \quad \nu = e^{kx},$$

sind, so erhält man

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\,y\,e^{kx}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{kx}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$A = (k^2 y^2 + 1)\,e^{2kx}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = k^2\,y\,e^{kx}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi = k^2\,y\,e^{kx}$$

$$\frac{1}{\nu} = e^{-kx}, \quad \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 = e^{-2kx}, \quad d\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 = -2\,k\,e^{-2kx}\,dx,$$

$$d\varphi = k\,y\,e^{kx}\,dx + e^{kx}\,dy, \quad \frac{1}{\nu^2}\,d\varphi = k\,y\,e^{-kx}\,dx + e^{-kx}\,dy$$

$$\frac{A}{2}\,d\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 = -(k^3 y^2 + k)\,dx,$$

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 \nabla^2\varphi\,d\varphi \quad + k^3 y^2\,dx + k^2\,y\,dy$$

und mithin

$$\frac{A}{2}\,d\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 \nabla^2\varphi\,d\varphi = k^2\,y\,dy - k\,dx = d\left(\frac{k^2 y^2}{2} - kx\right),$$

d. h. in diesem Fall ist die zweite Bedingung erfüllt.

Es gibt hiernach die Integration

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h - G^2\left(\frac{k^2 y^2}{2g} - \frac{kx}{g}\right) = \text{konst.}$$

und mit $v^2 = G^2 \frac{A}{\nu^2} = G^2 (k^2 y^2 + 1)^2$ in:

$$\frac{p}{\gamma} + h + G^2 \left(\frac{k x}{g} + \frac{1}{2g} \right) = \text{konst.}$$

die Gleichung der Niveauflächen; da h eine lineare Funktion der Koordinaten wird, so sind in diesem Fall die Niveauflächen Ebenen.

Man kann auf diese Weise von Fall zu Fall untersuchen, ob die Strömungsform eine widerstandsfreie Bewegung zuläßt.

Um hierüber einen allgemeinen Anhaltspunkt zu erhalten, kann man von den Gleichungen XXII ausgehen; man erkennt, daß die Summe

$$\left(W_x - \frac{v^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - G^2 \mu^2 \nabla^2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d x$$

$$+ \left(W_y - \frac{v^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - G^2 \mu^2 \nabla^2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) d y = d V$$

$$+ \left(W_z - \frac{v^2}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} - G^2 \mu^2 \nabla^2 \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d z$$

ein vollständiges Differential sein muß, daß also, wenn man noch $v^2 = G^2 A \mu^2$, ferner zur Abkürzung $\alpha_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\alpha_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\alpha_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ einsetzt und $\nabla^2 \varphi$ einfach mit $\triangle$ bezeichnet, die drei Gleichungen bestehen müssen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[W_y - G^2 \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} A + \mu^2 \triangle \cdot \alpha_2 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[W_x - G^2 \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} A + \mu^2 \triangle \cdot \alpha_1 \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[W_z - G^2 \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} A + \mu^2 \triangle \cdot \alpha_3 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[W_y - G^2 \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} A + \mu^2 \triangle \cdot \alpha_2 \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[W_x - G^2 \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} A + \mu^3 \triangle \cdot \alpha_1 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[W_z - G^2 \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} A + \mu^2 \triangle \cdot \alpha_3 \right) \right].$$

Durch Ausführung der angezeigten partiellen Differentiale und Ordnung erhält man das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} m \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) - n \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) &= r \\ o \left(u \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) - m \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) &= s \\ n \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) - o \left(\mu \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) &= t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{XXIV}$$

worin bedeutet

$$\left.\begin{aligned} m &= G^2\left(\frac{\partial A}{\partial y} - 2\triangle\cdot\alpha_2\right);\\ r &= G^2\mu^2\left(\frac{\partial \triangle}{\partial x}\alpha_2 - \frac{\partial \triangle}{\partial y}\alpha_1\right) - \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\\ n &= G^2\left(\frac{\partial A}{\partial x} - 2\triangle\cdot\alpha_1\right);\\ s &= G^2\mu^2\left(\frac{\partial \triangle}{\partial y}\alpha_3 - \frac{\partial \triangle}{\partial z}\alpha_2\right) - \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\\ o &= G^2\left(\frac{\partial A}{\partial z} - 2\triangle\cdot\alpha_3\right);\\ t &= G^2\mu^2\left(\frac{\partial \triangle}{\partial z}\alpha_1 - \frac{\partial \triangle}{\partial x}\alpha_3\right) - \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_y}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIV}_a$$

Ist $\mu = \lambda$, d. h. $\nu = 1$, so wird $\triangle = 0$, und sind $W_x = W_y = W_z = 0$, so geht das Gleichungssystem über in

$$\frac{\partial A}{\partial y}\left(\lambda\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) - \frac{\partial A}{\partial x}\left(\lambda\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) - \frac{\partial A}{\partial y}\left(\lambda\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}\left(\lambda\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) - \frac{\partial A}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) = 0;$$

diese Gleichungen können gleichzeitig im allgemeinen nur erfüllt werden, wenn λ konstant ist. Dies bedeutet mit $\triangle = 0$ vollkommene Potentialströmung; hiermit ist ein weiterer Beweis für den auf Seite 127 ausgedrückten Satz erbracht.

Im allgemeinen Fall können die Gleichungen XXIV nur erfüllt werden, wenn $o\,r + n\,s + m\,t = 0$ ist; wie sich leicht durch Auflösung derselben nach $\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)$, $\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$, $\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)$ ergibt; es wird

$$o\,m\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - o\,n\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = o\,r$$

$$n\,o\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - n\,m\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = n\,s$$

$$m\,n\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) - m\,o\left(\mu\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = m\,t,$$

mithin summiert

$$0 = o\,r + n\,s + m\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXIV}_b$$

Führt man nun in $XXIV_b$ die Werte aus $XXIV_a$ ein und ordnet den erhaltenen Ausdruck als Summe von Produkten mit α_1, α_2, α_3 als Einzelfaktoren, so erhält man die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 M + \alpha_2 N + \alpha_3 O = R \\ &\text{mit:} \\ M &= \left(G^2\mu^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial y}\right)\frac{\partial \triangle}{\partial z} - \left(G^2\mu^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial \triangle}{\partial y} + 2\triangle\left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right) \\ N &= \left(G^2\mu^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial z}\right)\frac{\partial \triangle}{\partial x} - \left(G^2\mu^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial x} + 2\triangle\left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right) \\ O &= \left(G^2\mu^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial y} - \left(G^2\mu^2 \cdot \frac{\partial A}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial x} + 2\triangle\left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right) \\ R &= \frac{\partial A}{\partial x}\left(\frac{\partial W_z}{\partial z} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial A}{\partial y}\left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right) \\ &\quad + \frac{\partial A}{\partial z}\left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \text{XXV}$$

Bezieht man die Gleichungen XXV auf widerstandsfreie Bewegungen, so sind $W_x = W_y = W_z = 0$ zu setzen; es wird $R = 0$ und in den andern Gliedern fällt $G^2\mu^2$ als gemeinschaftlicher Faktor aus; man erhält

$$\alpha_1\left(\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial y}\right) + \alpha_2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial z}\right)$$

$$+ \alpha_3\left(\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{\partial \triangle}{\partial x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXV}_a\right.$$

d. h. die Querschnittsfunktionen φ widerstandsfreier Strömungsformen erfüllen die Gleichung XXV_a, in welcher die Größen α, A und $\triangle$ Funktionen der partiellen Ableitungen von φ nach den Koordinaten sind.

XXV_a wird in folgenden Fällen jedenfalls erfüllt:

1. bei $\varphi =$ konstant, dies bedeutet aber Ruhezustand;
2. bei $A =$ konstant, dies bedeutet geradlinige Parallelströmung.
3. bei $\triangle =$ konstant, d. h. bei Potentialströmung oder wenn z. B. φ eine Funktion zweiten Grades der Koordinaten x, y, z ist;

4. wenn die Funktion φ und hiermit A und $\triangle$ nur von zwei Koordinaten abhängen, wobei jedoch auch die diese Koordinaten enthaltende Gleichung des Systems XXV erfüllt sein muß.

Widerstandslose Bewegung könnte, wenn überhaupt physikalisch möglich, nur bei Potentialströmungsformen und bei bestimmten wirbelhaften Strömungsformen stattfinden; gestattet die Kanalbegrenzung oder die Zustände am Zu- und Abfluß des Kanals die Ausbildung solcher Formen nicht, so kann die Strömung nur unter Störungen erfolgen, die Turbulenz erzeugen, daher a priori mit Widerständen behaftet sind[1]).

Längs einer Bahnlinie wird, wie auf Seite 123 allgemein ermittelt wurde, der Klammerausdruck der Gleichung XXIII identisch gleich Null, d. h. es besteht längs der Bahnlinie die Gleichung

$$\frac{g}{\gamma} dp + d\frac{v^2}{2} + g\,dh = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{konst.}$$

Bei der vollkommenen Potentialströmung hat die Konstante denselben Wert für alle Bahnlinien; bei der wirbelbehafteten Strömung kommt jeder Bahnlinie im allgemeinen ein besonderer Wert der Konstanten zu.

Es folgt hieraus, daß in allen Fällen widerstandsfreier Strömung die äußere Energie, d. i. die Summe von Pressungsenergie, kinetischer und potentieller Energie der durch einen elementaren Kanal strömenden Flüssigkeit konstant bleibt.

III. Strömungen mit Widerständen.

Es werden W und hiermit im allgemeinen auch W_x, W_y, W_z Funktionen der Ortskoordinaten sein, da jedenfalls bei Beharrungszustand der Hauptbewegung die Mittelwerte der Widerstandskomponenten ebenfalls unabhängig von der Zeit anzunehmen sind. Wie schon auf S. 123 erwähnt, wird der mathematischen Untersuchung das Problem zugrunde gelegt, für eine gegebene Strömungsform und Geschwindigkeitsverteilung die hierbei möglichen Widerstände zu bestimmen.

Die mathematische Bedingung, unter welchen die Werte der Komponenten W_x, W_y, W_z die Gleichung XXIII zu einem totalen Differen-

[1]) Oder es tritt diskontinuierliche Strömung ein.

tial machen, ist durch das Gleichungssystem XXV gegeben; nun sind die dynamischen Eigenschaften dieser Komponenten in Betracht zu ziehen:

Es findet nach dem früheren bei Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens neben seiner Ortsveränderung eine Deformation desselben statt; hierbei erleidet die äußere Energie einen Verlust zugunsten der inneren Energie und der Energie der turbulenten Bewegung. Da nun nach der Problemstellung W_x, W_y, W_z die Komponenten sind, unter denen eine angenommene Strömungsart stattfinden soll, so müssen deren Ausdrücke außer Teilen, die einer, entgegengesetzt der Bewegung wirksamen reinen Widerstandskraft W_s entsprechen, noch solche Teile enthalten, die den mit der angenommenen Strömungsform und Geschwindigkeitsverteilung verbundenen Turbulenzen entsprechen.

Demzufolge kann man für die Komponenten W_x, W_y, W_z setzen

$$\left.\begin{aligned} W_x &= W_s \cdot \frac{\alpha_1}{\sqrt{A}} + T_x \\ W_y &= W_s \cdot \frac{\alpha_2}{\sqrt{A}} + T_y \\ W_z &= W_s \cdot \frac{\alpha_3}{\sqrt{A}} + T_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{XXVI}$$

wobei sowohl W_s als auch T_x, T_y, T_z vorläufig als Funktionen der Koordinaten zu gelten haben, und nun deren notwendige mathematische Eigenschaften weiter untersuchen.

Bildet man zu dem Zwecke die im System XXV vorkommenden Differenzen der partiellen Ableitungen von W_x, W_y, W_z unter Berücksichtigung der Identitäten II, so erhält man:

$$\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} = \left[\alpha_3 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right) - \alpha_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial y}(T_z) - \frac{\partial}{\partial z}(T_y)\right]$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} = \left[\alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right) - \alpha_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial z}(T_x) - \frac{\partial}{\partial x}(T_z)\right]$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial z} - \frac{\partial W_x}{\partial y} = \left[\alpha_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right) - \alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}(T_y) - \frac{\partial}{\partial y}(T_x)\right]$$

und dies in das System XXV eingesetzt, gibt nach entsprechender Ordnung das neue System:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right)+b\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right)+c\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W_s}{\sqrt{A}}\right)=f+D\\
&a=\left(\alpha_2\frac{\partial A}{\partial z}-\alpha_3\cdot\frac{\partial A}{\partial y}\right)\\
&b=\left(\alpha_3\frac{\partial A}{\partial x}-\alpha_1\cdot\frac{\partial A}{\partial z}\right)\\
&c=\left(\alpha_1\frac{\partial A}{\partial y}-\alpha_2\cdot\frac{\partial A}{\partial x}\right)\\
&f=\alpha_1 G^2\mu^2\left(\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{\partial\triangle}{\partial z}-\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial\triangle}{\partial y}\right)\\
&\quad+\alpha_2 G^2\mu^2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial\triangle}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial\triangle}{\partial z}\right)\\
&\quad+\alpha_3 G^2\mu^2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{\partial\triangle}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{\partial\triangle}{\partial x}\right)\\
&D=\left(2\,\alpha_1\triangle-\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial}{\partial y}(T_z)-\frac{\partial}{\partial z}(T_y)\right]\\
&\quad+\left(2\,\alpha_2\triangle-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}(T_x)+\frac{\partial}{\partial x}(T_z)\right]\\
&\quad+\left(2\,\alpha_3\triangle-\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}(T_y)-\frac{\partial}{\partial y}(T_x)\right]
\end{aligned}\right\}\quad\text{XXVII}$$

Greift man noch auf den Ausdruck auf S. 128 von der Form

$$dV=Xdx+Ydy+Zdz$$

zurück und umformt denselben durch Einsetzen von $v^2=G^2\mu^2 A$ und der Ausdrücke für W_x, W_y, W_z entsprechend Gleichung XXVI, so erhält man:

$$X=W_s\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{A}}+T_x-G^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-G^2\mu^2\triangle\cdot\alpha_1$$

$$Y=W_s\cdot\frac{\alpha_2}{\sqrt{A}}+T_y-G^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-G^2\mu^2\triangle\cdot\alpha_2$$

$$Z=W_s\cdot\frac{\alpha_3}{\sqrt{A}}+T_z-G^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial x}-G^2\mu^2\triangle\cdot\alpha_3$$

Aus den Gleichungen XXVII ergeben sich folgende Grundsätze für die Bestimmung von W_s und der Komponenten T_x, T_y, T_z:

I. Die oberste Gleichung des Systems XXVII wird erfüllt, wenn $f=0$ ist und durch die Werte von T_x, T_y, T_z und W_s gleichzeitig $D=0$ und die ganze linke Seite gleich Null wird.

II. Wird durch die Werte von T_x, T_y, T_z wohl $D = 0$, ist aber hierbei f nicht gleich Null, so bildet die hiermit entstehende Gleichung die Bestimmungsgleichung für W_s.

Aus den Gleichungen für f und D folgt nun:

1. Es wird $f = 0$ für alle Formen, bei denen widerstandsfreie Bewegung möglich ist, da für dieselben XXV_a gilt.

2. Es wird $D = 0$

a) wenn

$$\left.\begin{aligned} T_x &= G^2\left(\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial x} + \mu^2\triangle\cdot\alpha_1\right) + \frac{\partial U}{\partial x} \\ T_y &= G^2\left(\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial y} + \mu^2\triangle\cdot\alpha_2\right) + \frac{\partial U}{\partial y} \\ T_z &= G^2\left(\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial z} + \mu^2\triangle\cdot\alpha_3\right) + \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \text{XXVIII}$$

worin U eine noch zu bestimmende Potentialfunktion ist.

3. Es wird

$$a\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{W_s}{\sqrt{A}} + b\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{W_s}{\sqrt{A}} + c\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{W_s}{\sqrt{A}} = 0.$$

wenn $\frac{W_s}{\sqrt{A}}$ eine Funktion Φ von φ ist, da sich hierbei gegenseitig die Glieder:

$$\alpha_2\cdot\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi}\alpha_1 - \alpha_2\frac{\partial A}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Phi}{d\varphi}\cdot\alpha_1$$

usw. aufheben.

4. Ist $A =$ konstant, was nur bei geradliniger Parallelströmung, d. h. wenn φ eine lineare Funktion der Koordinaten ist, eintritt, so werden $\triangle = 0$; $a = b = c = 0$, $f = 0$, $D = 0$; es könnte rein mathematisch W_s eine beliebige Funktion der Koordinaten sein.

Werden nun bei angenommenen Strömungsformen die Widerstandsgrößen in solchen Formen eingeführt, wie sie sich eben ergeben haben, so wird die mathematische Bedingung, daß sämtliche Glieder der Gleichung XXIII zu vollständigen Differentialen werden, erfüllt.

Es können ganz allgemein zwei Arten von Strömungsformen unterschieden werden:

1. Formen, bei denen eine widerstandsfreie Bewegung möglich wäre; dieselben sind charakterisiert durch die Bedingung $f = 0$; für die widerstandsfreie Bewegung muß $\lambda = 1$ sein; $\lambda = 1$ bedeutet Schichtströmung und zugleich Vorhandensein von Bewegungswiderständen.

2. Formen, bei denen eine widerstandsfreie Bewegung überhaupt nicht möglich ist; dieselben sind charakterisiert durch f 0.

Die Funktionen Φ und U sind derart zu wählen, daß bei ihrer Einführung in die Gleichung XXIII die gegenseitige Beziehung der in derselben enthaltenen Größen in einer sich mit der Erfahrung deckenden Weise zum Ausdruck kommt und daß es hierbei möglich wird, die als Beschleunigungswerte eingeführten Widerstände auf die Wirkung von Oberflächenkräften zurückzuführen, da mit Ausnahme der Schwerkraft keine Massenkräfte bei Bewegung im feststehenden Raum vorhanden sind.

In einem abgegrenzten Strömungsgebiet muß in der Zeiteinheit derjenige Betrag der Arbeit der Oberflächenkräfte, der eine Veränderung der inneren Energie, d. i. Wärme und Turbulenz, herbeiführt, gleich dem Verlust an äußerer Energie sein.

Was nun die Überführung in Oberflächenkräfte anbelangt, so ist folgendes zu beachten:

Wie schon im 1. Kapitel bei Anführung der allgemeinen Fundamentalgleichungen hervorgehoben wurde, bedeutet in denselben p einen Mittelwert der Pressungen, die sich in einem Punkt des Stromgebietes nach verschiedenen Richtungen einstellen, und zwar ist dies das arithmetische Mittel aus den drei Pressungen in drei zueinander senkrechten, aber sonst beliebigen Richtungen.

Die Zulässigkeit dieser Annahme ergibt sich aus folgendem:

Wie auf S. 113 bemerkt, besitzt jedes Element drei aufeinander senkrecht stehende Hauptdehnungsachsen und ist daher anzunehmen, daß auf den zu diesen Achsen senkrechten Flächen nur Normaldrücke, also reine Pressungen (keine Tangentialspannungen), d. s. die Werte der Tangentialkomponenten pro Flächeneinheit, wirksam sind; es seien nun Fig. 34 im, bei 0 vollkommen rechtwinkligen Tetraeder $0abc$ die Flächen $0ab$, $0ac$, $0bc$ solche zu den Hauptachsen senkrecht stehende

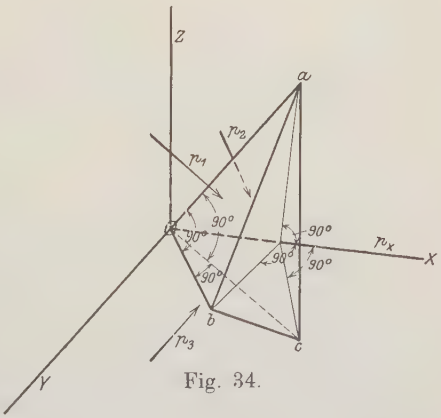

Fig. 34.

Flächen mit den Pressungen p_1, p_2, p_3; die Richtungskosinuse der Flächennormalen gegen die Koordinatenachsen seien l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3. Die Dreiecksfläche abc steht senkrecht zur X-Achse und p_x sei der Betrag der Pressung in dieser Fläche, dann besteht die Gleichung

$$p_x(abc) = p_1 0ab \cdot l_1 + p_2 0ac m_1 + p_3 0bc n_1$$

und da $0ab = abc \cdot l_1$; $0ac = abc \cdot m_1$; $0bc = abc \cdot n_1$

$$p_x = p_1 l_1^2 + p_2 m_1^2 + p_3 n_1^2.$$

Für Tetraeder in analoger Lage gegen die Y- und Z-Achse folgt

$$p_y = p_1 l_2^2 + p_2 m_2^2 + p_3 n_2^2$$
$$p_z = p_1 l_3^2 + p_2 m_3^2 + p_3 n_3^2,$$

woraus sich durch Addition und Berücksichtigung von

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1: \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1; \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

ergibt: $$p_x + p_y + p_z = p_1 + p_2 + p_3$$

In dieser Gleichung kommen die Richtungskosinuse nicht mehr vor; sie gilt daher für eine beliebige Lage der Koordinatenachsen gegen die Hauptachsen und folgt daraus, daß in einem Punkt die Summe der Pressungen nach drei zueinander senkrechten, aber sonst beliebigen Richtungen einen konstanten Wert hat; der Mittelwert, d. i. $p = {}^1/_3(p_x + p_y + p_z) = {}^1/_3(p_1 + p_2 + p_3)$ ist der in den Grundgleichungen der Bewegungen mit Widerständen eingeführte Pressungswert. (Diese Darlegung ist aus Lambs Hydrodynamik, S. 660, entnommen.)

Es ist hierbei nicht ausgeschlossen, daß in drei bestimmten zu einander senkrechten Flächen die Pressungswerte gleich groß sind.

Für die Tangentialspannungen ergibt sich ebenfalls eine bestimmte Eigenschaft. Sind am Parallelepiped Fig. 35 mit den Seiten δ_x, δ_y, δ_z, P_{xz} und P_{xy} die Komponenten der Oberflächenkräfte, die von der Tangentialspannung auf der ZOY-Rechteckfläche herrühren, also

$$P_{xy} = p_{xy} \delta_y \delta_z; \qquad P_{xy} = p_{xy} \delta_y \delta_z$$

und ebenso

$$P_{yz} = p_{yz} \delta_z \delta_x; \qquad P_{yx} = p_{yx} \delta_z \delta_x$$
$$P_{zy} = p_{zy} \delta_x \delta_y; \qquad P_{zx} = p_{zx} \delta_x \delta_y,$$

so müssen unter Vernachlässigung der Momente der Massenkräfte,

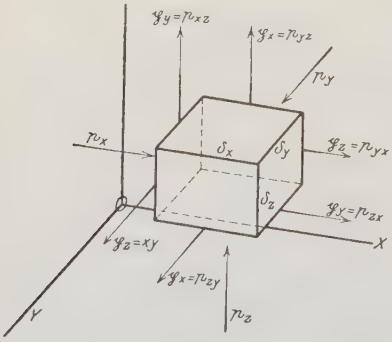

Fig. 35.

die gegenüber den Oberflächenkräften unendlich klein höherer Ordnung sind, die Momentgleichungen bestehen:

$$P_{yz}\frac{\delta_y}{2} = P_{zy}\frac{\delta_z}{2}; \qquad p_{yz}\delta_z\delta_x\frac{\delta_y}{2} = p_{zy}\cdot\delta_x\delta_y\cdot\frac{\delta_z}{2},$$

mithin: $p_{yz} = p_{zy}$ und ebenso $p_{zx} = p_{xz}$; $p_{xy} = p_{yx}$; d h. die Tangentialspannungen, die an zwei Flächenelementen wirksam sind, die sich an einer gemeinschaftlichen Kante unter einem rechten Winkel schneiden, haben gleiche Größe.

Der Kürze halber seien diese Spannungen entsprechend der gemeinschaftlichen Kante mit $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ bezeichnet, so daß z. B. $p_{yz} = p_{zy} = \mathfrak{p}_x$ ist.

Die Flächen und Richtungen, in denen die Pressungen $p_x\, p_y\, p_z$ und obige Spannungen wirken, ergeben sich aus beistehendem Schema

Es wirken in Richtung	X	Y	Z
in der Fläche YOZ	p_x	$\mathfrak{p}_z$	$\mathfrak{p}_y$
„ „ „ ZOX	$\mathfrak{p}_z$	p_y	$\mathfrak{p}_x$
„ „ „ XOY	$\mathfrak{p}_y$	$\mathfrak{p}_x$	p_z

Die Komponenten der Oberflächenkräfte, die in den zu den drei Richtungen X, Y, Z senkrechten Flächenpaaren wirken, sind hiernach in der

$$\left.\begin{aligned} X\text{-Richtung}\quad P_x &= -\frac{\partial p_x}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z - \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_z - \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial z}\delta_x\delta_y\delta_z \\ Y\text{-}\quad \text{„}\quad P_y &= -\frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z - \frac{\partial p_y}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_z - \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial z}\delta_x\delta_y\delta_z \\ Z\text{-}\quad \text{„}\quad P_z &= -\frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z - \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_z - \frac{\partial p_z}{\partial z}\delta_x\delta_y\delta_z \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIX}_a$$

P_x, P_y, P_z sind hiernach die wirklichen Komponenten der Oberflächenkräfte am Volumelement $\delta_x\delta_y\delta_z$, die das Massenelement $\delta_m = \frac{\gamma}{g}\delta_x\delta_y\delta_z$ im Verein mit der Schwerkraft beschleunigen; es bestehen daher folgende Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} P_x + K_x\delta_m &= \frac{dv_x}{dt}\delta_m = \left(K_x - W_x - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta_m \\ P_y + K_y\delta_m &= \frac{dv_y}{dt}\delta_m = \left(K_y - W_y - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta_m \\ P_z + K_z\delta_m &= \frac{dv_z}{dt}\delta_m = \left(K_z - W_z - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta_m \end{aligned}\right\} \quad \text{XXIX}_b$$

$$\left.\begin{aligned} P_x &= -\left(W_x + \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\delta_m \\ P_y &= -\left(W_y + \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)\delta_m \\ P_z &= -\left(W_z + \frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)\delta_m \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{XXIX}_c$$

Aus den Gleichungen XXIX_a und $_c$ folgt das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g} W_x + \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g} W_y + \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathfrak{p}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_z}{\partial z} &= \frac{\gamma}{g} W_z + \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{XXX}$$

Die Gleichungen desselben bilden im Verein mit der Mittelwertsbedingung die Bestimmungsgleichungen für p_x, p_y, p_z und $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$, bei gegebenen Ausdrücken für die Komponenten W und bei bekannten Werten von $\frac{\partial p}{\partial x}$ usw., wobei noch andere durch die Form und Art der Bewegung bestimmte Bedingungen zu berücksichtigen sein werden, z. B. das Fehlen von Oberflächenspannungen bei Schichtströmung in den die φ-Linien enthaltenden und Schichtflächen schneidenden Stromflächen.

Die Arbeit der Oberflächenkräfte wird in folgender Weise erhalten:

Am Volumelement $\delta_x\delta_y\delta_z$ ist die Arbeit der am Flächenpaar $\delta_y\delta_z$ wirksamen Pressungen und Spannungen pro Zeiteinheit bestimmt durch die Gleichung:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p_x v_x \delta_y\delta_z + \mathfrak{p}_x v_y \delta_y\delta_z + \mathfrak{p}_y v_z \delta_y\delta_z\right)\delta_x$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(p_x v_x + \mathfrak{p}_z v_y + \mathfrak{p}_y v_z\right)\delta_x\delta_y\delta_z$$

und an den beiden anderen Flächenpaaren:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{p}_z v_x + p_y v_y + \mathfrak{p}_z v_z\right)\delta_x\delta_y\delta_z$$

resp.

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{p}_z v_x + \mathfrak{p}_x v_y + p_z v_z\right)\delta_x\delta_y\delta_z.$$

Addiert man diese drei Arbeitswerte, so erhält man nach Ausführung der angezeigten Differentiationen, Berücksichtigung der Ausdrücke für P_x, P_y, P_z in den Gleichungen $XXIX_a$ und entsprechender Ordnung; die elementare Arbeit der Oberflächenkräfte in der Zeiteinheit:

$$\delta\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = (P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z) - \left[\left(p_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + p_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left. + \mathfrak{p}_x\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \mathfrak{p}_y\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \mathfrak{p}_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]\delta_x\delta_y\delta_z.$$

Nun ist nach Gleichung $XXIX_b$

$$P_x v_x + P_y v_y + P_z v_z$$
$$= -(W_x v_x + W_y v_y + W_z v_z)\delta_m - \left(\frac{\partial p}{\partial x}v_x + \frac{\partial p}{\partial y}v_y + \frac{\partial p}{\partial z}v_z\right)\delta_x\delta_y\delta_z$$
$$= -\frac{d\frac{v^2}{2}}{dt}\delta_m - (K_x v_x + K_y v_y + K_z v_z)\delta_m$$

gleich der Arbeit, die zur Änderung der kinetischen Energie der Hauptbewegung des Elementes nötig ist, soweit hierfür nicht schon die Schwerkraft dienlich ist; es stellt mithin der Rest der rechten Seite des Ausdruckes für $\delta\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ denjenigen Betrag der scheinbar verlorenen Energie dar, die im Element teils als Wärme, teils als kinetische Energie der turbulenten Bewegung entsteht.

Der Betrag der scheinbar verlorenen Energie heißt die Dissipation der Energie; der gesamte Betrag derselben in einem abgegrenzten Stromgebiet ergibt sich mit

$$\mathfrak{E} = -\iiint\left[\left(p_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]\delta_x\delta_y\delta_z$$

und muß gleich sein, der im Gebiet verschwundenen äußeren Energie.

Die Zulässigkeit der in diesem Kapitel beschriebenen Darstellungsweise für stationäre Strömungen und die Verwendbarkeit der an dieser Stelle mit kartesischen Koordinaten durchgeführten Untersuchungsmethoden werden im folgenden an speziellen Strömungsformen geprüft werden: hierbei werden statt des kartesischen, Netz-Koordinatensysteme verwendet werden.

2. Strömungen in geraden Rohren.

A. Kreisförmiges Profil.

Sowohl die Untersuchungen von Poisseuille als auch diejenigen von Lorentz gehen von der Annahme aus, daß die Bewegung in geraden Rohren mit kreisförmigem Querschnitt als Parallelströmung mit einer derartigen Geschwindigkeitsverteilung betrachtet werden kann, daß die Strömungsgeschwindigkeit längs einer gegen die Rohrwand konzentrischen Zylinderfläche konstant ist, in den verschiedenen Zylinderflächen aber verschiedene Werte hat; dementsprechend kann man die Strömung als kreiszylindrische Schichtströmung mit geradliniger Parallelströmung als Grundform auffassen. Ferner hat die Erfahrung ergeben, daß in solchen Rohren, abgesehen vom Einfluß der Schwerkraft infolge des geodätischen Höhenunterschiedes der einzelnen Punkte im Strömungsgebiet, die Pressung in sämtlichen Bahnen längs derselben um den gleichen Betrag pro Längeneinheit abnimmt und dieselbe hierbei in den einzelnen Querschnitten konstant ist; letztere Eigenschaft ergibt sich aus den Fundamentalgleichungen.

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen und Erfahrungen konnten bezüglich der Geschwindigkeitsverteilung die im 1. Kapitel angegebenen Formeln abgeleitet werden; dieselben sollen zur Wegleitung für die Wahl der Funktionen Φ und U herangezogen werden.

In Zylinderkoordinaten ergeben sich für die Parallelströmung im kreiszylindrischen Rohr die Formfunktionen:

1. der Querschnittsflächen: $\varphi = s$,
2. der zylindrischen Stromflächen: $\psi = \frac{r^2}{2}$,
3. der Meridianebenen als Stromflächen: $\chi = q$.

(Es wurde hier die Achsenkoordinate mit s statt, wie früher, mit p bezeichnet, um Verwechslungen mit der Pressungsbezeichnung zu vermeiden.) Hieraus ergeben sich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{r \partial q} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad A = 1,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial q^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0, \quad f = 0,$$

ferner

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{r \partial q} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = r, \quad B = r^2 = 2\psi,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{r \partial q} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0, \quad C = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\psi}, \quad \nu = 1.$$

Die Strömung ist der Form nach eine Potentialströmung.

a) Strömung mit Reibung.

Bei Strömungen mit Reibung, aber ohne Turbulenz, ist nach Poisseuille die Geschwindigkeit in der Zylinderfläche mit dem Radius r:

$$v = \frac{p_I - p_{II}}{4 \eta l}(r_a^2 - r^2) = \frac{\Delta p}{4 \eta l}(r_a^2 - r^2)$$ [1])

worin $\frac{p_I - p_{II}}{l}$ der konstante Pressungsabfall pro Längeneinheit und η der Koeffizient der Reibung ist, der so lange einen konstanten Wert beibehält, als der physikalische Zustand der Flüssigkeit konstant bleibt; wird daher

$$\frac{p_I - p_{II}}{4 \eta l} = G \text{ und } r_a^2 - r^2 = 2(\psi_a - \psi) = \lambda$$

gesetzt (ψ_a = Funktionswert von ψ an der Rohrwand), so ist

$$v = G \lambda = G \sqrt{A}\, \mu$$

$$\text{da } \sqrt{A} = 1 \text{ und } \mu = \frac{\lambda}{\nu} = \lambda \text{ ist } (\nu = 1);$$

d. h. die Isotachengleichung ist mit der Poisseuilleschen Gleichung in Einklang gebracht; λ ist als Funktion von ψ ausgedrückt, die Strömung ist eine Schichtströmung mit konstanter Geschwindigkeit innerhalb der zylindrischen Schichtflächen.

---

[1]) Siehe Seite 22.

Wird die mit den Erfahrungen sich deckende Annahme gemacht, daß die Größe der Widerstände von der Pressung selbst nicht beeinflußt wird, sondern nur abhängig von der relativen Geschwindigkeit der Flächen der Flüssigkeitselemente resp. von der Geschwindigkeit der Deformation derselben, so wird die Pressungsverteilung durch die Schwerkraft nur entsprechend der geodätischen Höhenlage der Punkte des Strömungsgebietes beeinflußt und man kann daher das Glied $g\,dh$ vorbehaltlich späterer Wiedereinführung weglassen; dies vereinfacht die mathematische Darstellung wesentlich und soll daher im folgenden verwendet werden; bei Problemen, wo die Wirksamkeit der Schwerkraft einflußnehmend auf die Form der Strömung ist, darf dies natürlich nicht geschehen (wie z. B. beim Problem der freien Oberflächen).

Da Potentialform vorliegt, mithin widerstandsfreie Bewegung möglich wäre, wird die mathematische Bedingung der Gleichung XXIII erfüllt, wenn $\overset{W_s}{\underset{V\,A}{\quad}} = \Phi$ und die Komponenten von T derart gewählt werden, daß $D = 0$ wird, also wenn

$$T_x = G^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial x} + \mu^2\triangle\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{G^2}{2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$T_y = G^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial y} + \mu^2\triangle\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{G^2}{2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$T_z = G^2\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial z} + \mu^2\triangle\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{G^2}{2}\frac{\partial\lambda^2}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z}$$

eingesetzt werden. Man erhält dann aus Gleichung XXIII wegen $\triangle = 0$.

$$\frac{g}{\gamma}dp + d\frac{v^2}{2} + \Phi\,d\varphi + dU = 0.$$

In dieser Form ist die Gleichung unabhängig vom Koordinatensystem; man kann sich in derselben daher auch alle Größen als Funktionen von φ, ψ und χ denken, da jeder Punkt des Stromgebietes bestimmt ist, wenn die Funktionswerte der denselben enthaltenden Flächen gegeben sind.

Die Auflösung nach den Differentialen $d\varphi$, $d\psi$ und $d\chi$ führt auf nachstehende Gleichung:

$$\left(\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\varphi} + \Phi + \frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)d\varphi + \left(\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial\psi} + \frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\psi} + \frac{\partial U}{\partial\psi}\right)d\psi$$
$$+ \left(\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial\chi} + \frac{\partial\frac{v^2}{2}}{\partial\chi} + \frac{\partial U}{\partial\chi}\right)d\chi = 0,$$

die für alle beliebigen Werte von $d\varphi$, $d\psi$ und $d\chi$ erfüllt sein muß; es folgt hieraus das Gleichungssystem:

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \varphi}+\Phi+\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial \psi}+\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \psi}+\frac{\partial U}{\partial \psi}=0$$

$$\frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial \chi}+\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \chi}+\frac{\partial U}{\partial \chi}=0$$

Die letzte dieser Gleichungen entfällt, da man wegen Außerachtlassung des Einflusses der Schwerkraft aus Symmetriegründen Kongruenz der Zustände für alle χ-Flächen annehmen kann (wenigstens für die Hauptströmung); in der ersten Gleichung wird $\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \varphi}=0$, da $v=G\cdot\lambda$ und λ nur von ψ abhängig ist; in der zweiten Gleichung wird $\frac{\partial \frac{v^2}{2}}{\partial \psi}=\frac{G^2}{2}\frac{d\lambda^2}{d\psi}$; es folgen mithin

$$\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\Phi+\frac{\partial U}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{g}{\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial \psi}+\frac{G^2}{2}\frac{d\lambda^2}{d\psi}+\frac{\partial U}{\partial \psi}=0;$$

da nun der relative Pressungsabfall längs aller Bahnlinien gleich also $\frac{\partial p}{s}=-k_0$ oder auch $\frac{\partial p}{\partial \varphi}=-k_0=$ konstant und ebenso die Pressung innerhalb einer Querschnittsfläche konstant, d. h. $\frac{\partial p}{\partial \psi}=0$ ist, so folgen:

$$\Phi+\frac{\partial U}{\partial \varphi}=\frac{g}{\gamma}k_0;\qquad \frac{G^2}{2}\cdot\frac{d\lambda^2}{d\psi}+\frac{\partial U}{\partial \psi}=0$$

und hiermit die gesuchten Formen für die Funktionen U und Φ

$$U=\frac{g}{\gamma}k_0\varphi-\frac{G^2\lambda^2}{2};\quad \Phi=0^{1}).$$

Es werden somit die gesamten Widerstandskomponenten nach den Richtungen s resp. r

[1]) Es wird sich später ergeben, unter welchen Umständen Φ nicht gleich Null anzunehmen ist.

$$W_s = \Phi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + G^2 \frac{A}{2} \frac{\partial \mu^2}{\partial s} + \mu^2 \triangle \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{g}{\gamma} k_0$$

$$W_r = G^2 \frac{A}{2} \cdot \frac{\partial \mu^2}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Die Gleichung XXIII erhält die Form

$$\frac{g}{\gamma} dp + \frac{g}{\gamma} k_0 \, d\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \text{XXIII*}$$

und gibt bei Wiedereinführung von $g\,dh$ und Berücksichtigung, daß $d\varphi = ds$ ist, durch Integration die Gleichung

$$p + \gamma h + k_0 s = \text{Konstante},$$

h ist natürlich in Koordinaten auszudrücken und hierbei die Lage des Koordinatensystems gegen die Schwererichtung zu berücksichtigen. Die Konstante ist bestimmt, wenn die Pressung in einem Punkte des Gebietes bestimmt ist.

Vom Einfluß der Schwerkraft auf die Pressungsverteilung abgesehen, sind die Querschnittsflächen gleichzeitig Niveauflächen; ist das Rohr mit exakt lotrechter Achse aufgestellt, so sind auch mit der Schwerkraft die Querschnittflächen gleichzeitig Niveauflächen.

Aus der Gleichung für v ergibt sich das in der Zeiteinheit durch das Rohr fließende Volumen mit

$$V = \int_0^{r_a} v \cdot 2\,r\,\pi\,dr = \pi \frac{p_I - p_{II}}{8\,\eta\,l} r_a^4 .$$

Diese Formel gibt die Grundlage der von Poisseuille verwendeten und heute noch gebräuchlichen Methode zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten.

Aus derselben bestimmt sich die mittlere Durchflußgeschwindigkeit mit

$$v_m = \frac{v}{r_a^2 \pi} = \frac{p_I - p_{II}}{8\,\eta\,l} r_a^2 ,$$

man erhält in

$$\frac{p_I - p_{II}}{l} = \frac{8\,\eta}{r_a^2} v_m$$

den Ausdruck zur Bestimmung des relativen Pressungsabfalles (Pressungsabfall pro Längeneinheit).

Differenziert man die Geschwindigkeitsformel nach r und setzt

$$\frac{p_I - p_{II}}{l} = k_0$$

ein, so folgt

$$-\frac{k_0 r}{2\,\eta} = \frac{dv}{dr} .$$

Dieses Resultat wird später verwendet werden.

b) Strömung mit Reibung und Turbulenz.

Für Strömungen mit Reibung und Turbulenz liegen empirische Ergebnisse vor, die in den Bielschen Formeln (Seite 11) zusammengefaßt sind, und außerdem die auf Seite 24 angeführten Formeln von Lorentz.

Die Bielschen Formeln A und B geben vereinigt unter Berücksichtigung, daß der Profilsradius R für ein kreiszylindrisches Rohr $= \frac{r_a}{2}$ ist die Gleichung:

$$\frac{h_w}{l} = \frac{b(\eta)}{\gamma}\left(\frac{2}{r_a}\right)^{\frac{3}{2}} v_m + a\left(\frac{2}{r_a}\right) v_m^{\,2} + f\left(\frac{2}{r_a}\right)^{\frac{3}{2}} v_m^{\,2}.$$

v_m ist die mittlere Durchflußgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde; r_a der Wandradius in Metern.

Biel hat den Reibungskoeffizienten (η) im absoluten Maßsystem (CGS-Einheiten) aufgenommen, die Länge l in Kilometern eingesetzt und für γ den Gewichtswert in Gramm pro Kubikzentimeter, also für Wasser $\gamma = 1$ eingeführt; für den Anschluß an spätere Entwicklungen ist es aber günstig, sämtliche Werte im technischen Maßsystem mitzuführen; hierzu ist nur nötig, statt $\frac{b(\eta)}{\gamma}$ zu schreiben: $10 \cdot \frac{b\,g \cdot \eta}{\gamma} = \frac{b' g\,\eta}{\gamma}$, worin nun η den Reibungskoeffizienten in der Dimension $\frac{\text{kg} \cdot \text{sek}}{\text{qm}}$ enthält; $\gamma = 1000$ kg/cbm und $g = 9{,}81$ m/sek² ist; ferner sind statt a resp. f die Werte $10^{-3} \cdot a$ resp. $10^{-3} \cdot f$ einzusetzen.

Weiter wird darauf Rücksicht zu nehmen sein, daß in den Bielschen Koeffizienten a und f der Nenner der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_m^{\,2}}{2\,g}$ aufgenommen ist, so daß man durch Multiplikation jedes dieser beiden Koeffizienten mit $2\,g$ andere Koeffizienten $a' = a\,2\,g$ $f' = f \cdot 2\,g$ erhält, bei deren Benützung wieder $\frac{v_m^{\,2}}{2\,g}$ in die Formel eintreten würde; diese Koeffizienten werden aber in der Bielschen Form weiter benützt, und zwar der Einfachheit halber und mit Rücksicht auf die Deutung des Inhalts der Turbulenzglieder nach der Theorie von Lorentz.

Die Dimensionen der Koeffizienten a und f sind

$$a \ldots . \text{sek}^2 \cdot m^{-1}$$
$$f \ldots . \text{sek}^2 \cdot m^{-\frac{1}{2}}$$

Aus obiger Gleichung erhält man

$$v_m = \sqrt{C_1^2 \eta^2 + C_2 \left(\frac{h_w}{l}\right)} - C_1 \eta$$

mit $$C_1 = \frac{\frac{b' g}{2 \gamma}}{a \left(\frac{r_a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + f}; \quad C_2 = \frac{\left(\frac{r_a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a \left(\frac{r_a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + f}.$$

Da $\frac{h_w}{l}$ längs allen Strombahnen denselben Wert hat, so wird die Geschwindigkeitsverteilung durch denjenigen Funktionsausdruck von r beschrieben, der in der Gleichung $v_m r_a^2 \pi = \int_0^{r_a} v \, 2 r \pi \, dr$ eingesetzt, obigen Ausdruck für v_m ergibt.

Die allgemeine Bestimmung dieses Funktionsausdruckes könnte mittels Reihenentwicklung erfolgen; hierbei ist zu beachten, daß derselbe zur Darstellung des Haftens an der Wand für $r = r_a$ den Wert $v = 0$ ergeben muß.

Die Glieder mit η beschreiben den Einfluß der Viskosität; vernachlässigt man dieselben als relativ sehr klein, so wird

$$v_m = \sqrt{C_2 \left(\frac{h_w}{l}\right)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{r_a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a \left(\frac{r_a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + f} \left(\frac{h_w}{l}\right)}.$$

Eine weitere Vereinfachung kann eintreten, wenn man noch das zweite Glied im Nenner von C_2 (etwa unter entsprechender Korrektur des immerhin empirischen Koeffizienten a) wegläßt, es wird:

$$v_m = \sqrt{\frac{r_a}{2} \frac{1}{a} \frac{h_w}{l}};$$

natürlich erscheint das letzte Resultat sofort, wenn man in der Bielschen Gleichung η und $f = 0$ setzt.

Dieser Wert von v_m wird erhalten, wenn man

$$v = \frac{5}{4} \sqrt{\frac{h_w}{2 a l}} (r_a^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}$$

als Geschwindigkeitsgleichung einführt; ersetzt man $\frac{h_w}{l}$ durch

$$\frac{\Delta p}{\gamma l} = \frac{p_I - p_{II}}{\gamma},$$

so erhält man

$$v = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{p_I - p_{II}}{a\,l\,\gamma}}\,(r_a^{\,2} - r^2)^{\frac{1}{4}}$$

worin nun

$$\frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{p_I - p_{II}}{2\,a\,l\,\gamma}} = G_t \quad \text{und} \quad (r_a^{\,2} - r^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{4}}\,(\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}} = \lambda_t$$

gesetzt werden kann, womit wieder

$$v = G\sqrt{A\,\mu} = G_t \cdot \lambda_t$$

wird und somit der Anschluß an die gewählte Darstellungsweise erreicht ist; die turbulente Strömung im kreiszylindrischen Rohr erscheint ebenfalls als Schichtströmung mit Potentialform.

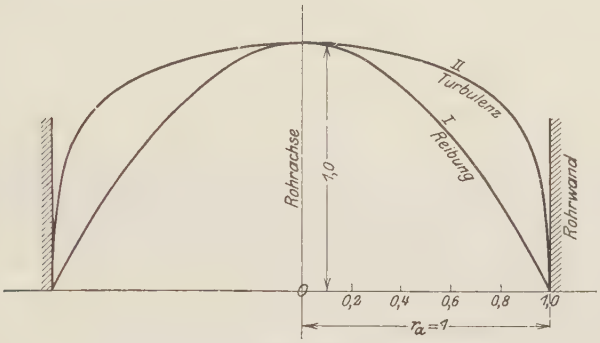

Fig. 36.

Beistehende Tabelle und Fig. 36 zeigt vergleichsweise den Verlauf der Funktion $\lambda_t = 2^{\frac{1}{4}}\,(\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}}$ und jenen von $\lambda_r = 2\,(\psi_a - \psi)$, die der Poiseuilleschen Gleichung entspricht.

$\frac{r}{r_a} = 0$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\lambda_t = 1{,}00$	0,99	0,96	0,89	0,77	0,0
$\lambda_r = 1{,}00$	0,96	0,84	0,64	0,36	0,00.

Die ausgleichende Wirkung der Turbulenz kommt hiernach schon bei dieser vereinfachten Formel von λ_t zum Ausdruck.

Die vereinfachte Formel $\lambda_t = 2^{\frac{1}{4}}(\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}}$ entspricht ebenso der Annahme des Haftens der Flüssigkeit an der Wand, wie dies einerseits auch bei der Poiseuilleschen Formel der Fall ist und andererseits von Lorentz bei Ableitung der auf Seite 24 angegebenen Formeln ebenfalls angenommen wurde; Lorentz kommt allerdings auf Seite 70 der bezüglichen Abhandlung auf Grund von Grenzbetrachtungen zur Schlußfolgerung, daß bei großen Werten von $r_a^2\pi$ und $\frac{p_I - p_{II}}{l}$ die Dicke der an die Rohrwand anschließenden Schicht,

in der der rasche Geschwindigkeitsabfall stattfindet, so klein wird, daß man ohne Fehler sagen kann, die Flüssigkeit gleite an der Wand.

Da die Formel für λ durch Umformung der Bielschen empirischen Formel entstanden ist, so gibt dieselbe natürlich keine anderen Aufschlüsse über das Wesen der Turbulenz als die Ursprungsformel selbst und wird diesbezüglich auf die Originalarbeiten von Biel verwiesen.

Wird die vereinfachte Form von λ benützt, so ist im Ausdruck für U die Konstante k_0 der Formel Poisseuille durch $k_0 = \frac{3}{2}\frac{2}{5}\, a\gamma G_t^2$ zu ersetzen, so daß mit $\Phi = 0$ und $U = \frac{g}{\gamma}\frac{32}{25}\, a\gamma G_t^2 \cdot \varphi - \frac{G_t^2 \lambda^2}{2}$ die Gleichung XXIII die Form annimmt:

$$\frac{g}{\gamma} dp + \frac{32}{25} a g G_t^2 d\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXIII}^{**}$$

Man erhält, wenn man auf der linken Seite wieder das Glied $g dh$ anfügt, integriert und mit $\frac{\gamma}{g}$ multipliziert die Gleichung:

$$p + \gamma h + \frac{3}{2}\frac{2}{5}\, a g G_t^2 s = \text{Konstante},$$

die mit p als Parameter zur Gleichung der Niveauflächen wird.

Die vereinfachte Formel für λ resp. v ergibt auch die bekannte hydraulische Regel, wonach in einem Rohr die Widerstandshöhe direkt proportional der Länge und der Geschwindigkeitshöhe und umgekehrt proportional dem Profilsradius ist.

Für den späteren Gebrauch seien die Isotachengleichungen beider Fälle noch in folgender Form mit $\frac{p_I - p_{II}}{l\gamma} = \frac{h_w}{l}$ notiert:

$$\frac{h_w}{2l}(\psi_a - \psi) = \eta v$$

entspricht der Poiseuilleschen Formel,

$$\frac{h_w}{2l}(\psi_a - \psi) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 a^2 \frac{\gamma l}{h_w} v^4$$

entspricht der vereinfachten Turbulenzformel.

c) Bestimmung der Oberflächenkräfte.

Es sind nun die an einem Element wirksamen Oberflächenkräfte einzuführen, was im gegebenen Fall zweckmäßig am Ringsektor erfolgt nach beistehender Fig. 37 und entsprechendem Schema.

Es wirken in Richtung	s	q	r
in der Fläche $r\,\delta q\,\delta r$	p_s	$\mathfrak{p}_r$	$\mathfrak{p}_q$
in der Fläche $\delta s\,\delta r$	$\mathfrak{p}_r$	p_q	$\mathfrak{p}_s$
in der Fläche $r\,\delta q\,\delta s$	$\mathfrak{p}_q$	$\mathfrak{p}_r$	p_r

p_s, p_q und p_r sind Pressungen, $\mathfrak{p}_s$, $\mathfrak{p}_q$ und $\mathfrak{p}_r$ Spannungen; die denselben entsprechenden Komponenten[1]) sind folgende:

In Richtung			s	q	r
Pressungskomponente			$-\frac{\partial p_s}{\partial s}\cdot\delta s\cdot r\delta q\cdot\delta r$	$-\frac{\partial p_q}{\partial q}\cdot\delta q\cdot\delta r\cdot\delta s$ $+\mathfrak{p}s\cdot\delta s\cdot\delta r\cdot\delta q$	$-\frac{\partial p_r\cdot r}{\partial r}\cdot\delta r\cdot\delta q\cdot\delta s$ $+pr\cdot\delta s\cdot\delta r\cdot\delta q$
Spannungskomponente die	s	Kante schneidend	—	$-\frac{\partial \varphi_s r}{\partial r}\cdot\delta r\cdot\delta q\cdot\delta s$	$-\frac{\partial \mathfrak{p}_s}{\partial q}\cdot\delta q\cdot\delta r\cdot\delta s$
	q		$-\frac{\partial \mathfrak{p}_q\cdot r}{\partial s}\cdot\delta r\cdot\delta q\cdot\delta s$	—	$-\frac{\partial \mathfrak{p}_r}{\partial s}\cdot\delta r\cdot\delta r\cdot r\delta q$
	r		$-\frac{\partial \mathfrak{p}_r}{\partial q}\cdot\delta q\cdot\delta r\cdot\delta s$	$-\frac{\partial \mathfrak{p}_r}{\partial s}\cdot\delta s\cdot r\delta q\cdot\delta r$	—

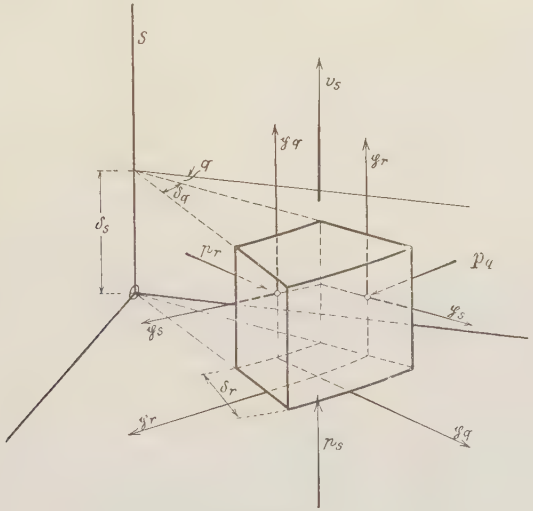

Fig. 37.

durch Addition folgen:

in Richtung s: $$P_s = -\left(\frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{p}_r}{r\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{p}_q\cdot r}{r\partial r}\right)\delta s\cdot r\delta q\cdot\delta r$$

[1]) Die Bestimmung dieser Komponenten erfolgt z. B. für die Pressungskompenente in der Richtung s entsprechend:

$$p_s(r\,\delta q\cdot\delta r) - \left(p_s + \frac{\partial p}{\partial s}\,\delta s\right)(r\,\delta q\cdot\delta r) = -\frac{\partial p}{\partial s}\,\delta s\cdot r\,\delta q\cdot\delta r.$$

in Richtung q: $P_q = -\left(\frac{\partial \mathfrak{p}_r}{\partial s} + \frac{\partial p_q}{r\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{p}_s}{\partial r}\right) \delta s \cdot r\delta q \cdot \delta r$

„ „ r: $P_r = -\left(\frac{\partial \mathfrak{p}_r}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{p}_s}{r\partial q} + \frac{\partial p_r \cdot r}{r\partial r}\right) \delta s \cdot r\delta q \cdot \delta r.$

Die partiellen Ableitungen nach q sind wegen Kongruenz der Zustände an jedem Parallelkreis gleich Null; wegen Bestandes der Schichtströmung sind in den χ-Flächen (Meridianebenen) keine Tangentialspannungen wirksam, also $\mathfrak{p}_r = 0$ und $\mathfrak{p}_s = 0$.

Die Beschleunigungskomponenten in Richtung der Zylinderkoordinaten sind allgemein:

Nach Richtung	s	q	r
gleich	$\frac{dv_s}{dt}$	$\frac{dv_q}{dt} + \frac{v_q \cdot v_r}{r}$	$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_q^2}{r}$

Bei Außerachtlassung des Einflusses der Schwerkraft erhält man die Komponenten der Oberflächenkräfte allgemein:

$$P_s = \frac{dv_s}{dt}\delta_m = -\left(W_s + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s}\right)\delta_m$$

$$P_q = \left(\frac{dv_q}{dt} + \frac{v_q v_r}{r}\right)\delta_m = -\left(W_q + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{r\partial q}\right)\delta_m$$

$$P_r = \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_q^2}{r}\right)\delta_m = -\left(W_r + \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}\right)\delta_m$$

mit den speziellen Werten:

$$v_r = 0; \quad v_q = 0; \quad v_s = v$$

$$W_s = \frac{g}{\gamma} k_0; \quad W_q = 0; \quad W_r = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial s} = -k_0; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial q} = 0$$

werden:

$$P_s = 0; \quad P_q = 0; \quad P_r = 0.$$

Hiermit folgen die Gleichungen:

1. $\frac{\partial \mathfrak{p}_s}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{p}_q \cdot r}{r\partial r} = 0;$

2. $\frac{\partial \mathfrak{p}_q}{\partial s} - \frac{p_q}{r} + \frac{p_r}{r} + \frac{\partial p_r}{\partial r} = 0$

und die Mittelwertgleichung:

3. $p_s + p_q + p_r = 3p = 3K - 3k_0 s$

als Bestimmungsgleichungen für die Werte von p_s, p_q, p_r und $\mathfrak{p}_q$. Dieselben werden erfüllt mit

$$p_s = K - k_0 s; \quad p_q = K - k_0 s; \quad p_r = K - k_0 s; \quad \mathfrak{p}_q = \frac{k_0 r}{2}.$$

K ist die Integrationskonstante der Gleichung XXIII*; resp. XXIII** k_0 ist der Wert von $\frac{p_{II} - p_I}{l}$.

Es werden die Pressungswerte in Richtung der drei Zylinderkoordinaten, die in diesem Falle mit Netzkoordinaten zusammenfallen, gleich groß; der Spannungswert $\mathfrak{p}_q$ wird in der Achse, sonst aber nirgends gleich Null.

d) Bestimmung der Dissipation.

Für die Bestimmung der Dissipation ergibt sich zuerst wieder allgemein die Arbeit pro Zeiteinheit der wirksamen Pressungen und Spannungen am Element.

$$\delta\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial s}(p_s v_s + \mathfrak{p}_r v_a + \mathfrak{p}_q v_r) + \frac{\partial}{r\partial q}(\mathfrak{p}_r v_s + p_q v_q + \mathfrak{p}_s v_r) + \frac{\partial}{r\partial r}(\mathfrak{p}_q r v_s + \mathfrak{p}_r r v_q + p_r r v_r)\right] r\delta_q\delta_r\delta_s.$$

Der Ausdruck vereinfacht sich aus denselben Gründen wie diejenigen von P_s und P_r; es wird:

$$\delta\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\right) = -\left[\frac{\partial}{\partial s}(p_s v) + \frac{\partial}{r\partial r}(\mathfrak{p}_q r v)\right] r\delta q\cdot\delta r\delta s$$

$$= -\left[v\left(\frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{p}_q r}{r\partial r}\right) + \left(p_s\frac{\partial v}{\partial s} + \mathfrak{p}_q\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right] r\delta q\delta r\delta s$$

$$= -\left(\mathfrak{p}_q\frac{\partial v}{\partial r}\right) r\delta q\delta r\delta s$$

$$\left(\text{da } \frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{p}_q r}{r\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = 0 \text{ sind}\right).$$

Für den gesamten Betrag der Dissipation ergibt die Gleichung:

$$4. \quad -\mathfrak{E} = \int\int\int \mathfrak{p}_q\frac{\partial v}{\partial r} r\delta q\delta r\delta s = \text{konstant}$$

mit den Grenzen: s_{II} und s_I für s; 2π und 0 für q; r_a und 0 für r; es wird mit $s_{II} - s_I = l$ und $v = G\lambda$, $\frac{\partial v}{\partial r} = G\frac{d\lambda}{dr}$

$$-\mathfrak{E} = \int_{s_I}^{s_{II}} \delta s \int_0^{2\pi} \delta q \int_0^{r_a} G\frac{d\lambda}{dr}\cdot\frac{k_0}{2} r^2\delta r = \pi l G k_0 \int_0^{r_a}\frac{d\lambda}{dr} r^2 dr.$$

Nun ist $d(\lambda r^2) = \lambda\, d(r^2) + \dfrac{r^2\, d\lambda}{dr}\, dr$, daher:

$$\int_0^{r_a} \frac{d\lambda}{dr}\, r^2\, dr = \int_0^{r_a} d(\lambda r^2) - \int_0^{r_a} \lambda\, d(r^2) = (\lambda r^2)\Big|_0^{r_a} - \int_0^{r_a} \lambda\, d(r^2) = -\int_0^{r_a} \lambda\, d(r^2)\,,$$

weil $(\lambda r^2) = 0$ wird sowohl für $r = 0$ als auch für $r = r_a$.

Setzt man allgemein $\lambda = (r_a{}^2 - r^2)^n$, so folgt:

$$\int_0^{r_a} \frac{d\lambda}{dr}\, r^2\, dr = -\int_0^{r_a} \lambda\, d(r^2) = \int_0^{r_a} \lambda\, d(r_a{}^2 - r^2)$$

$$= \frac{(r_a{}^2 - r^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_{r=0}^{r=r_a} = -\frac{r_a{}^{2(n+1)}}{n+1}\,.$$

Für die Bewegung mit Reibung ist $n = 1$, daher:

$$\int_0^{r_a} \frac{d\lambda}{dr}\, r^2\, dr = -\frac{r_a{}^4}{2}\,,$$

ferner ist hierbei

$$k_0 = \frac{p_I - p_{II}}{l}\,, \quad G = G_r\,,$$

somit der Wert der Dissipation:

$$\mathfrak{E} = \pi\, l \cdot G_r \frac{p_I - p_{II}}{l} \frac{r_a{}^2}{4} = (p_I - p_{II})\, F v_m$$

und da die mittlere Geschwindigkeit $v_m = G_r \dfrac{r_a{}^2}{2}$ und $F = r_a{}^2 \pi$ sind.

Für Bewegung mit Turbulenz ist $n = {}^1/_4$, daher:

$$\int_0^{r_a} \frac{d\lambda}{dr}\, r^2\, dr = -\tfrac{4}{5}\, r_a{}^{\frac{5}{2}}\,,$$

ferner ist hierbei $k_0 = \dfrac{p_I - p_{II}}{l}$, $G = G_t$, hiermit

$$\mathfrak{E} = \pi \cdot l \cdot G_t \cdot \frac{p_I - p_{II}}{l} \cdot \tfrac{4}{5}\, r_a{}^{\frac{5}{2}}\,.$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$v_m = \tfrac{4}{5}\, G_t \sqrt{r_a} \quad \text{und} \quad F = r_a{}^2 \pi;$$

es folgt schließlich ebenfalls

$$\mathfrak{E} = (p_I F - p_{II} F)\, v_m$$

als Wert der Dissipation bei Turbulenz. Es ist mithin in beiden Fällen der Betrag der Dissipation gleich dem Verlust an äußerer, d. i. Strömungsenergie, da wegen $\frac{\partial v}{\partial s} = 0$ die kinetische Energie keine Änderung erfährt und die Überführung der fingierten Massenkräfte in Oberflächenkräfte durchgeführt.

In Zusammenfassung der erhaltenen Resultate ergibt sich folgende Tabelle.

Tabelle für stationäre Strömungen im geraden kreiszylindrischen Rohr mit der Bezeichnung $\frac{p_I - p_{II}}{l} = \frac{\gamma h_w}{l}$.

Mit Reibung	Mit Turbulenz
Formfunktionen:	
$\varphi = s;\ A = 1$	
$\psi = \frac{r^2}{2};\ \nu = 1$	
$\chi = q;\ \mu = \lambda$	
Geschwindigkeitskonstanten G:	
$G_r = \frac{\gamma h_w}{4\eta l} \ldots \mathrm{m}^{-1}/\mathrm{sek}^{-1}$	$G_t = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{h_w}{2al}} \ldots \mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{sek}^{-1}$
Funktion λ:	
$\lambda_r = 2(\psi_a - \psi) = (r_a^2 - r^2) \ldots$	$\lambda_t = 2^{\frac{1}{4}}(\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}} = (r_a^2 - r^2)^{1/4} \ldots$
Isotachengleichung:	
$v = G_r \lambda_r = \frac{\gamma h_w}{4\eta l}(r_a^2 - r^2)$	$v = G_t \cdot \lambda_t = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{h_w}{2al}}(r_a^2 - r^2)^{1/4}$
Mittlere Geschwindigkeit:	
$v_m^{\mathrm{m/sek}} = \frac{\gamma h_w}{8\lambda l} r_a^2$	$v_m^{\mathrm{m/sek}} = \sqrt{\frac{r_a h_w}{2al}}$
Abflußmenge:	
$V^{\mathrm{ccm/sek}} = \frac{\gamma \pi h_w}{8\eta l} r_a^4$	$V^{\mathrm{ccm/sek}} = r_a^2 \pi \sqrt{\frac{r_a h_w}{2al}}$
Gleichung der Niveauflächen:	
$p + \gamma h + \frac{\gamma h_w}{l}\varphi = \text{konst.} = K$	

oder

$$p + \gamma h + \frac{\gamma h_w}{l} s = \text{konst.} = K$$

Pressungen:

$$p_s = K - k_0 s$$
$$p_q = K - k_0 s$$
$$p_r = K - k_0 s$$

Spannung:

$$\mathfrak{p}_q = \frac{k_0 r}{2}$$

Gesamtdissipation:

$$\mathfrak{E} = (p_I F - p_{II} F) v_m .$$

e) Allgemeine Widerstandsformeln.

Auf Seite 144 wurde aus der Poiseuilleschen Geschwindigkeitsformel die Beziehung $\frac{dv}{dr} = -\frac{k_0 r}{2\eta}$ abgeleitet; hieraus folgt:

$$\mathfrak{p}_q = -\eta \frac{dv}{dr} .$$

Da $\frac{dv}{dr} = G \frac{d(r_a^2 - r^2)}{dr}$ negativ ist, so wird der Wert von $\mathfrak{p}_q$ positiv; dies entspricht der auf S. 7 geschilderten Wirkung der Reibungskraft, wonach dieselbe beschleunigend auf diejenige Schicht wirkt, die sich relativ langsamer, verzögernd auf diejenige, die sich relativ rascher bewegt, wirkt.

In dieser Form besteht somit Übereinstimmung mit dem Grundgesetz der Reibung.

Aus der Geschwindigkeitsformel für turbulente Bewegung (rechtsstehende Tabelle) kann man ableiten (durch differentieren):

$$\frac{r}{2} = -\frac{1}{4} \frac{4 a^2 l^2}{h_w^2} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{\partial v^4}{\partial r},$$

dies gibt in die Gleichung für $\mathfrak{p}_q$ eingesetzt den Ausdruck:

$$\mathfrak{p}_q = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot (2a)^2 \cdot \frac{\gamma l}{h_w} \cdot \frac{\partial v^4}{\partial r},$$

welcher als eine angenäherte Gleichung für den Bewegungswiderstand pro Flächeneinheit bei Strömung mit Turbulenz betrachtet werden kann.

Eine weitere Verallgemeinerung unter Einbeziehung der Reibung kann schließlich durch die Formel erzielt werden:

$$\mathfrak{p}_q = -\left[\eta \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\gamma l}{h_w}\left(a\frac{\partial v^2}{\partial r} + b\frac{\partial v^3}{\partial r} + c\frac{\partial v^4}{\partial r} + \ldots\right)\right],$$

worin a, b, c ... ebenso empirisch zu bestimmende Koeffizienten sind, wie a, b und f in der Bielschen Formel.

Eine Bestätigung der Zulässigkeit dieser Form wird sich aus einer später folgenden Untersuchung ergeben.

Mit dieser allgemeinen Form ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung $\mathfrak{p}_q$ d. i.

$$\frac{d\mathfrak{p}_q \cdot r}{r\,dr} = \frac{\gamma h_w}{l}$$

durch Integration:

$$\frac{\gamma h_w}{l}\frac{r^2}{4} + k \lg \text{nat}\, r + k' = -\left[\eta v + \frac{\gamma l}{h_w}(a v^2 + b v^3 + c v^4 + \ldots)\right]$$

k und k' sind Integrationskonstanten; für das gerade, voll ausgefüllte Rohr muß $k = 0$ und entsprechend der Annahme des Haftens an der Wand, also $v = 0$ bei $r = r_a$ muß $k' = -\gamma \frac{h_w}{l} \cdot \frac{r_a^2}{4}$ sein.

Es folgt hiermit als allgemeine Geschwindigkeitsgleichung für das gerade kreiszylindrische Rohr:

$$\frac{\gamma h_w}{4 l}(r_a^2 - r^2) = \eta v + \frac{\gamma l}{h_w}(a v^2 + b v^3 + c v^4 + \ldots)$$

Nimmt man:

$$a = b = c = \ldots = 0$$

so ergibt sich hieraus die Poisseuillesche Geschwindigkeitsformel; nimmt man:

$$\eta = 0, \qquad c = e, \qquad a = b = c = \ldots 0$$

so folgen die Formeln für turbulente Bewegung:

$$v = c^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{h_w}{2l}}(r_a^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}; \quad v_m = \frac{4}{5}c^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{h_w}{2l}}\sqrt{r_a}$$

der Koeffizient c kann mit der Gleichung $c = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot a^2$ aus dem Bielschen Koeffizienten a bestimmt werden.

f) Vergleiche mit den Formeln von Lorentz.

Mit der Bezeichnung

$$\varrho = \frac{\gamma}{g}, \qquad q = \frac{p_I - p_{II}}{l} = \frac{\gamma h_w}{l}$$

kann die allgemeine Gleichung in die Form gebracht werden:

$$c = \frac{\gamma}{4\eta}(r_a^2 - r^2) - \frac{\varrho}{\eta}\left[\left(g \cdot a \cdot \frac{l}{h_w}\right) v^2 + \left(g \cdot b \cdot \frac{l}{r_w}\right) v^3 + \ldots\right].$$

aus der sich mit

$$\varrho\left[\left(g\,a\,\frac{l}{h_w}\right) v^2 + \ldots\right] = \int_r^{r_a} Q\,dr$$

die Gleichung von Lorentz ergibt; durch das Klammerglied wird ebenso wie durch das Integral der Einfluß der Turbulenz zum Ausdruck gebracht.

Der Vergleich der beiden Ausdrücke führt auf folgende Erwägungen:

In der Formel von Lorentz ist $Q = \varrho\,\overline{v_\varphi'}\,\overline{v_\psi'}$, wobei $\overline{v_\varphi'}$ und $\overline{v_\psi'}$ die Mittelwerte der Turbulenzgeschwindigkeiten sind, über deren Größe und Verteilung nichts bekannt ist, die aber, wie bereits auf Seite 23 bemerkt, in ihrer Zusammensetzung als Produkt dem Transport von Bewegungsgrößen entsprechen; es ist also

$$g\,\frac{a\,l}{h_w}\,v^2 + g\left(\frac{b\,l}{h_w}\right) v^3 \ldots = \int_r^{r_a} v_\varphi'\,v_\psi'\,dr$$

das Integral hat die Dimension $l^3 \cdot t^{-2}$; trennt man nun von den linksseitigen Gliedern $\left(\frac{l}{h_w}\right) v^2$ ab und schreibt

$$\frac{l}{h_w} \cdot v^2\,(a g + b g v + c g v^2 + \ldots) = \int_r^{r_a} v_\varphi' \cdot v_\psi'\,dr,$$

so wird die Gleichung dimensionell homogen, wenn den Koeffizienten a, b, c ... solche Dimensionen zugeordnet werden, daß der Ausdruck unter der runden Klammer die Dimension einer Länge erhält; dies tritt ein, wenn man zuteilt:

dem Koeffizienten	a	die Dimension	t^2
„	„	b	„	„	$l^{-1} \cdot t^3$
„	„	c	„	„	$l^{-2} t^4$

usf.

Der Koeffizient c steht mit dem Bielschen Koeffizienten a in folgendem Zusammenhang

$$c = \left(\frac{4}{5}\right)^4 a^2$$

nach der Dimensionsbestimmung auf S. 145 hat hierin a die Dimension $l^{-1} \cdot t^{+2}$, also c die nach oben für die Übereinstimmung nötige Dimensionszuordnung.

Man kann einen weiteren Schluß durch folgende Umformung aus der Gleichung ziehen:

$$\frac{\gamma h_w}{l} = q = \frac{4\eta}{r_a^2 - r^2} \cdot v + 8 g \gamma \left(\frac{l}{h_w}\right) \left[\frac{a + b v + c v^2 + \dots}{(r_a^2 - r^2)}\right] \frac{v^2}{2g}.$$

In dieser Zusammensetzung ist die Formel als Summe zweier Glieder mit v resp. v^2 als Faktoren geordnet, analog wie dies bei der empirischen Formel der Fall ist; ersetzt man nun in der eckigen Klammer v durch $G\lambda$ usw. und $r_a^2 - r^2$ durch $2(\psi_a - \psi)$, so erhält der Klammerausdruck die Form

$$\frac{1}{(2\psi_a - \psi)} a + \frac{\lambda}{(2\psi_a - \psi)} (bG) + \frac{\lambda^2}{2(\psi_a - \psi)} \cdot (cG^2) + \dots$$

und erscheint in derselben als Formglied mit den Formfaktoren $\frac{1}{2(\psi_a - \psi)}$; $\frac{\lambda}{2(\psi_a - \psi)}$; $\frac{\lambda^2}{2(\psi_a - \psi)}$ usw. und Geschwindigkeitsfaktoren a, bG, cG^2 .... die multipliziert mit dem gemeinschaftlichen Faktor $8 g \gamma \left(\frac{l}{h_w}\right)$ den Geschwindigkeiten des turbulenten Bewegungsanteiles entsprechen.

In der Poisseuilleschen Formel wechselt $\frac{\gamma h_w}{l}$, d. i. der relative Pressungsabfall mit v das Zeichen; es ist daher diese Formel für Untersuchungen mit wechselnder Bewegungsrichtung brauchbar; in der empirischen Formel mit $\frac{v^2}{2g}$ als Faktor ist dies nicht der Fall.

Läßt man in der allgemeinen Isotachengleichung das Glied mit ηv weg, so kann man dieselbe schreiben

$$\gamma \left(\frac{h_w}{l}\right)^2 \cdot (r_a^2 - r^2) = v^2 (a + b v + c v^2 + \dots)$$

oder

$$\frac{h_w}{l} = v \sqrt{\frac{a + b v + c v^2 + \dots}{r_a^2 - r^2}}.$$

Faßt man nun entsprechend den früheren Erörterungen den Wurzelausdruck als Formglied auf, so wird der Ausdruck ebenfalls für Richtungswechsel brauchbar und begründet hiermit die Zulässigkeit der Einführung einer linearen Abhängigkeit der Widerstandshöhe von v bei Untersuchungen mit Richtungswechsel der Bewegungen. Siehe den Artikel „Wasserschloßprobleme“ des Verfassers: Schweiz. Bauzeitung Bd. LII, Nr. 21, 23, 24, 25.

Werden die Koeffizienten $a, c, \dots = 0$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{\gamma h_w}{l} = \frac{8 \eta v}{r_a^2 - r^2} + 8 g \gamma \left(\frac{l}{h_w}\right) \left[\frac{b v^3 + d v^5 + \dots}{r_a^2 - r^2}\right],$$

in welcher Form der Ausdruck ebenfalls das Zeichen mit v wechselt.

g) Das doppelwandige Profil.

Für ein Rohr mit ringförmigem kreiskonzentrischem Querschnitt, dessen innere Begrenzungsfläche den Radius r_b hat, ergeben sich die Integrationskonstanten der Gleichungen wieder unter der Annahme des Haftens an beiden Wänden, also $v = 0$ bei $r + r_a$ und $r = r_b$ aus den Gleichungen

$$\gamma \frac{h_w}{l} \cdot \frac{r_a^2}{4} + k \lg r_a + k' = 0$$

$$\gamma \frac{h_w}{l} \cdot \frac{r_b^2}{4} + k \lg r_b + k' = 0$$

und wenn $r_a > r_b$ ist

$$\gamma \frac{h_w}{4\,l} (r_a^2 - r_b^2) = -k \lg \frac{r_a}{r_b}$$

$$k = -\gamma \frac{h_w}{4\,l} (r_a^2 - r_b^2) \lg \frac{r_b}{r_a}$$

$$k' = -\gamma \frac{h_w}{l} \frac{r_a^2}{4} + \gamma \frac{h_w}{4\,l} (r_a^2 - r_b^2) \lg \frac{r_b}{r_a} \lg r_a$$

und hiermit

$$\gamma \frac{h_w}{4\,l} \left[(r_a^2 - r^2) - \frac{r_a^2 - r^2}{\lg \left(\frac{r_b}{r_a} \right)} \cdot \lg \frac{r}{r_a} \right] = \eta v + \frac{\gamma l}{h_w} (a v^2 + b v^3 + \ldots)$$

mit $a = b = c = \ldots = 0$ gilt die Gleichung für die Bewegung mit Reibung allein und kommt in Übereinstimmung mit der bezüglichen Formel in Lambs Hydrodynamik, S. 674.

h) Ergänzungen.

Die angenommene Strömungsform und Geschwindigkeitsverteilung setzt voraus, daß die Verteilung des Energieflusses für alle Querschnitte gleich ist und also auch beim Eintritt in das Strömungsgebiet vorhanden, d. h. im Zuströmungsraum vorbereitet worden sein muß; andernfalls tritt Unstetigkeit der Strömung im Rohr ein entsprechend den Versuchen von Reynolds (Seite 9); die Einflüsse der Widerstände müssen dementsprechend auch konstant auf die ganze Länge des Stromgebietes sein; ist dies nicht der Fall, sondern sind dieselben veränderlich, so ist die durch die Formeln erhaltene Beschreibung der Zustände nicht richtig; es wären für U und Φ Funktionsformen zu wählen, durch die diese Einflüsse zum Ausdruck kommen; z. B. für genietete Rohre mit gleichlangen Schüssen wären Φ und U als periodische Funktionen einzuführen.

In Fig. 38 und 39 sind die Diagramme von zwei Meßversuchen dargestellt, die mir von der Firma Escher, Wyß & Co. in Zürich zur Verfügung gestellt wurden; dieselben geben die mittels Pitotrohren bestimmten Geschwindigkeitskurven an einer Rohrleitung der

Anlagen am Niagarafall; es läßt sich aus demselben einerseits die ausgleichende Wirkung der Turbulenz, andererseits die Zulässigkeit der Annahme einer geordneten Geschwindigkeitsverteilung der Hauptbewegung im Sinne der verwendeten Darstellungsweise erkennen.

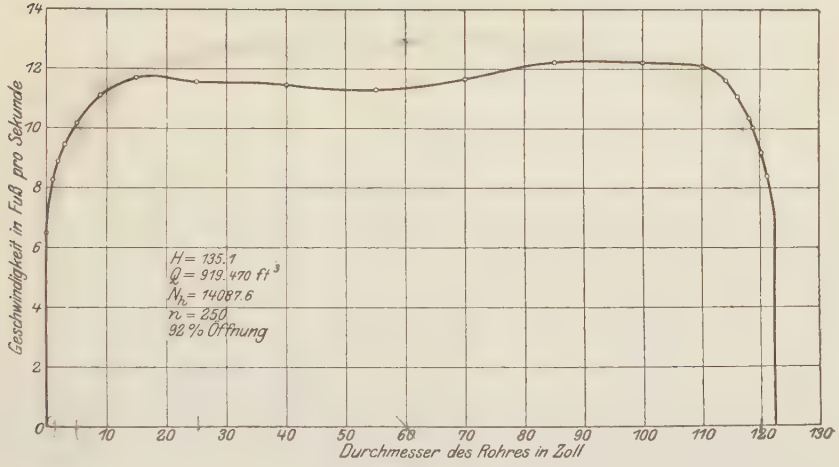

Fig. 38.

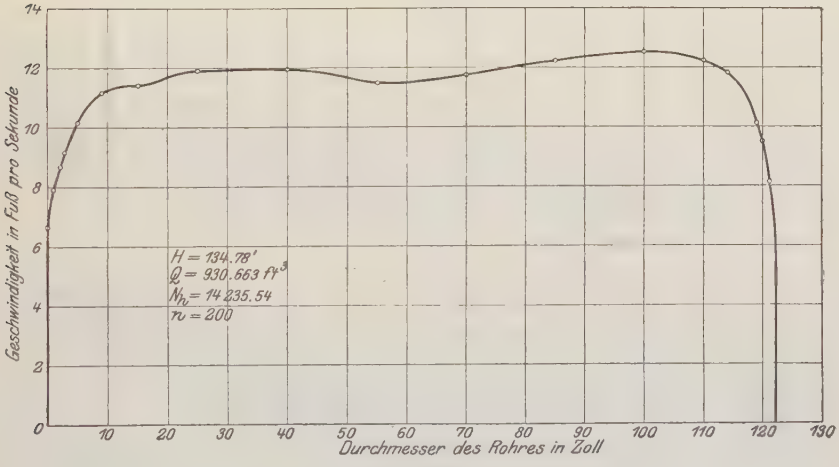

Fig. 39.

Die Verwendung solcher Versuchsresultate wird die Bestimmung der Funktionsform von λ ermöglichen.

Die Form $\lambda = (\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}}$ entspricht den vorliegenden Diagrammen nur teilweise; in einer folgenden Untersuchung wird eine Form von λ

— allerdings bei anderer Strömungsform — gefunden werden, die auch die Einsenkung der Kurve in der Mitte enthält.

Es dürfte durch die bisherigen Erörterungen bestätigt sein, daß die vorgeschlagene Darstellungsweise die Beschreibung des Strömungsvorganges und die quantitative Bestimmung der einflußnehmenden Größen für Strömungen im kreiszylindrischen Rohr ermöglicht.

B. Elliptisches Profil.

Nach der in Lambs Hydrodynamik auf S. 675 für die Bewegung mit Reibung durch ein Rohr mit elliptischem Querschnitt angegebenen Geschwindigkeitsformel ergibt sich für diesen Fall die Isotachengleichung

$$v = \frac{\gamma h_w}{2 \eta l} \cdot \frac{r_a^2 \cdot r_b^2}{r_a^2 + r_b^2} \left(1 - \frac{y^2}{r_a^2} - \frac{z^2}{r_b^2}\right)$$

mit r_a und r_b als Halbachsen der Wandellipse; sind y_a und z_a die Koordinaten der letzteren, so wird an der Wand $v = 0$ entsprechend dem Haften der Flüssigkeit an der Wand.

Setzt man

$$\psi' = y^2 \frac{2 r_b^2}{r_a^2 + r_b^2} + z^2 \frac{2 r_a^2}{r_a^2 + r_b^2},$$

so werden die ψ'-Flächen als Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur X-Achse und mit der Wandellipse ähnlichen und zu demselben konzentrisch gelegenen Ellipsen dargestellt; mit $r_a = r_b = r$, d. h. für den Kreis wird $\psi = y^2 + z^2 = r^2$ wie früher.

Die Isotachengleichung erscheint in der Form

$$v = \frac{\gamma h_w}{4 \eta l} (\psi_a - \psi),$$

so daß $G = \frac{\gamma h_w}{4 \eta l}$, $\psi_a - \psi = \mu$ und $v = G \sqrt{A}\, \mu$ gesetzt werden kann, womit der Anschluß an die verwendete Darstellungsweise erreicht und die Strömung als Schichtströmung gekennzeichnet ist.

Von den Formfunktionen sind mithin $\varphi = x$ und ψ' bestimmt; χ ist noch wählbar; mit Rücksicht auf die anschließende Bestimmung der Tangentialspannung wird dies zweckmäßig in solcher Weise erfolgen, daß die χ-Flächen nicht nur orthogonal zu den φ-Flächen ($\varphi = x$), sondern auch orthogonal zu den ψ'-Flächen, also ebenfalls Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur X-Achse sind, deren Leitlinien sind hiernach als orthogonale Trajektorien der Ellipsen

zu bestimmen und haben die χ-Flächen und ψ-Flächen der Gleichung zu genügen:

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0,$$

da nun

$$\beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 0$$

sind, so folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0$$

oder mit

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{4r_b^2}{r_a^2 + r_b^2}\cdot y; \qquad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{4r_a^2}{r_a^2 - r_b^2}\cdot Z$$

die Differentialgleichung für die Bestimmung der χ-Funktion:

$$\frac{4r_b^2}{r_a^2 - r_b^2}\,y\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{4r_a^2}{r_a^2 - r_b^2}\,z\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0.$$

Dieser Gleichung wird durch jede Funktion des Argumentes

$$\frac{r_a^2 + r_b^2}{4r_b^2}\lg y - \frac{r_a^2 + r_b^2}{4r_a^2}\lg z$$

entsprochen, man kann daher

$$\chi = \frac{r_a^2 + r_b^2}{4r_b^2}\lg y - \frac{r_a^2 + r_b^2}{4r_a^2}\lg z$$

als Gleichung der χ-Flächen betrachten und erhält somit die Formfunktionen:

$$\varphi = x$$

$$\psi = \frac{2r_b^2}{r_a^2 + r_b^2}y^2 + \frac{2r_a^2}{r_a^2 + r_b^2}z^2 = My^2 + Nz^2,$$

$$\chi = \frac{r_a^2 + r_b^2}{4r_b^2}\lg y - \frac{r_a^2 + r_b^2}{4r_a^2}\lg z = \frac{\lg y}{2M} - \frac{\lg z}{2N},$$

wenn man zur Abkürzung

$$\frac{2r_b^2}{r_a^2 + r_b^2} = M; \qquad \frac{2r_a^2}{r_a^2 + r_{bz}} = N$$

schreibt; es wird hierbei $M + N = 2$

Aus der ersten der Gleichungen IV folgt:

$$1 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)\nu = -\left(\frac{M}{N}\cdot\frac{y}{z} + \frac{N}{M}\cdot\frac{z}{y}\right)$$

$$= -\frac{M^2y^2 + N^2z^2}{MNyz}\cdot\nu$$

und somit $$\nu = -\frac{MNyz}{M^2y^2 + N^2z^2}$$ [1].

Da jedoch ν eine Funktion nur von y und z, φ eine Funktion nur von x ist, so wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial z} = 0,$$

also $\nabla^2\varphi = 0$, d. h. die Strömung hat Potentialform.

Es werden ferner:

$$A = 1, \qquad B = 4M^2y^2 + 4N^2z^2, \qquad C = \frac{1}{4M^2y^2} + \frac{1}{4N^2z^2} = \frac{M^2y^2 + N^2z^2}{4M^2N^2y^2z^2}.$$

Nach Gleichung IX S. 60 ist: $A = \nu^2 BC\sin^2\omega$; da wegen der Orthogonalität $\sin\omega = 1$ ist, folgt: $1 = \nu^2 BC$, was mit den Werten für A, B, C übereinstimmt; ferner folgt hiermit:

$$\sqrt{\frac{B}{C}} = \nu B = -4MNyz,$$

wovon später Gebrauch gemacht wird.

Um nun zu kontrollieren, ob die mit $\lambda = \psi'_a - \psi'$ bestimmte Geschwindigkeitsverteilung dem allgemeinen Reibungsnetz entspricht, sind wie früher die Oberflächenkräfte zu bestimmen: um Wiederholungen zu vermeiden, werden nur die notwendigsten Untersuchungen durchgeführt. Ein von je zwei benachbarten φ-, ψ'- und χ-Flächen begrenztes, wegen der dreifachen Orthogonalität dieser Flächen ebenfalls dreifach orthogonales Element hat die mittleren Seitenlängen (siehe Fig. 40 und Gleichungen VIII):

$$ds_\varphi = \frac{1}{\sqrt{A}}d\varphi = d\varphi$$

$$ds_\psi = \nu\sqrt{\frac{C}{A}}d\psi = \nu\sqrt{C}\,d\psi$$

$$ds_\chi = \nu\sqrt{\frac{B}{A}}d\chi = \nu\sqrt{B}\,d\chi$$

[1]) ν ist zwar nicht im ganzen Raum, aber längs der Bahnlinien konstant, besitzt somit die Eigenschaft einer λ-Funktion; im vorliegenden und auch in den nächstfolgenden Fällen ist die ganze Wirbelfunktion $\mu = \frac{\lambda}{\nu}$ nur von ψ' abhängig und charakterisiert somit Schichtströmung.

und die Inhalte der Flächenelemente

$$df_\varphi = (\perp \text{ auf die } \varphi\text{-Linien}) = ds_\psi \cdot ds_\chi = \nu\, d\psi\, d\chi$$
$$df_\psi = (\;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \psi\text{-} \;\; \ldots \;\;) = ds_\varphi \cdot ds_\chi = \nu \sqrt{B}\, d\varphi\, d\chi$$
$$df_\chi = (\;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \chi\text{-} \;\; \ldots \;\;) = ds_\varphi \cdot ds_\psi = \nu \sqrt{C}\, d\varphi\, d\psi.$$

Werden bezeichnet

In Richtungen der Linien	φ	ψ	χ
Die Pressungen mit	p_φ	p_ψ	p_χ
Die Spannungen an der χ-Kante mit .	$\mathfrak{p}_\chi$	$\mathfrak{p}_\chi$	
Wirksam auf den Flächen	df_φ	df_ψ	df_χ

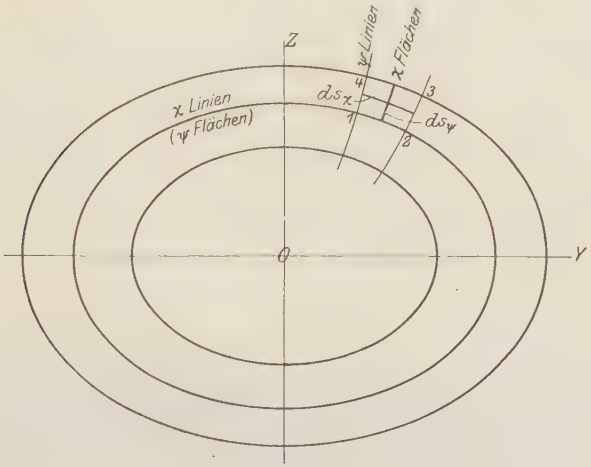

Fig. 40.

($\mathfrak{p}_\varphi$ und $\mathfrak{p}_\psi$ entfallen wegen Schichtströmung), so folgt:

$$P_\varphi = \left[p_\varphi\, df_\varphi - \left(p_\varphi\, df_\varphi + \frac{\partial p_\varphi\, df_\varphi}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \right]$$
$$+ \left[\mathfrak{p}_\chi\, df_\chi + \left(\mathfrak{p}_\chi\, df_\chi + \frac{df_\psi\, \partial \mathfrak{p}_\chi}{\partial \psi}\, d\psi \right) \right)$$
$$= - \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\, \nu p_\varphi \right) d\varphi\, d\psi\, d\chi - \frac{\partial}{\partial \psi} (\mathfrak{p}_\chi \nu \sqrt{B})\, d\varphi.\; d\psi.\; d\chi.$$

Für die Funktionen U und Φ und die Komponenten von W ergeben sich gleiche Formen wie beim kreiszylindrischen Rohr; es wird dementsprechend:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\, \nu p_\varphi + \frac{\partial}{\partial \psi} \cdot \mathfrak{p}_\chi \nu \sqrt{B} = 0,$$

ν ist unabhängig von φ. Wird analog wie früher Gleichheit der Pressungen am Netzelement, d. h. $p_\varphi = p_\psi = p_\chi = p = K - k_0 \varphi$ annommen, so folgt:

$$\frac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} = -k_0, \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \mathfrak{p}_\chi \nu \sqrt{B} = \nu k_0 .$$

Nun ist nach dem Reibungsgesetz

$$\mathfrak{p}_\chi = -\eta \frac{\partial v}{\partial s_\psi} = -\eta \frac{\partial v}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s_\psi} = -\frac{\eta}{\nu \sqrt{C}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \psi} ;$$

mit $v = G_r (\psi_a - \psi)$, wird: $\frac{\partial v}{\partial \psi} = -G_r$,

somit:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \mathfrak{p}_\chi \nu \sqrt{B} = \eta G_r \frac{\partial}{\partial \psi} \sqrt{\frac{B}{C}} = \nu k_0$$

Ferner ist: $\sqrt{\frac{B}{C}} = -4 MNyz$ demnach:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \sqrt{\frac{B}{C}} = -4 MN \frac{\partial yz}{\partial \psi} = -4 MN \left(\frac{\partial yz}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial yz}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \psi} \right).$$

Nach dem Schema VII, S. 60, sind

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1}{A} \nu = \gamma_3 \nu = \frac{\partial \chi}{\partial z} \nu = -\frac{1}{2N} \frac{1}{z} \nu ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2}{A} \nu = -\gamma_2 \nu = \frac{\partial \chi}{\partial y} \nu = -\frac{1}{2M} \frac{1}{y} \nu ,$$

somit

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \sqrt{\frac{B}{C}} = +4 MN \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2M} \right) \nu = 2 (M + N) \nu = 4 \nu .$$

Dies gibt schließlich:

$$4 \nu \eta G_r = k_0$$

oder

$$4 \eta G_r = k_0 = \frac{\gamma h_w}{l} ,$$

in Übereinstimmung mit den Resultaten am kreiszylindrischen Rohr.

Für die Bewegung mit Reibung und Turbulenz im elliptischen Rohr erhält man durch den allgemeinen Ansatz:

$$\mathfrak{v}_z = -\left[\eta\frac{\partial v}{\partial s_\psi} - \gamma\frac{l}{h_w}\left(a\cdot\frac{\partial v^2}{\partial s_\psi} + b\frac{\partial v^3}{\partial s_\psi} + \ldots.\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\nu\sqrt{C}}\left[\eta\frac{\partial v}{\partial \psi} + \gamma\frac{l}{h_w}\left(a\frac{\partial v^2}{\partial \psi} + b\frac{\partial v^3}{\partial \psi}\ldots.\right)\right].$$

Die Isotachengleichung mit $\psi = y^2\frac{2\,r_b^2}{r_a^2 + r_b^2} + z^2\frac{2\,r_a^2}{r_a^2 + r_b^2}$

$$\frac{\gamma\,h_w}{4\,l}(\psi_a - \psi) = \eta\,v + \frac{\gamma\,l}{h_w}(a\,v^2 + b\,v^3 + \ldots.)$$

die wieder mit $a = b = \ldots.0$ in die Lambsche Gleichung für Bewegung mit Reibung allein übergeht.

Lamb hat die Formel für die Geschwindigkeit im elliptischen Rohr aus der Differentialgleichung abgeleitet

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{k_0}{\eta}$$

die sich ergibt, wenn man in den Fundamentalgleichungen für die Bewegung mit Reibung (siehe Seite 21) $v_x = v$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ setzt und $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ ist; es reduziert sich dann die erste dieser Gleichungen auf den obigen Ausdruck und ist hierdurch ein einfaches Mittel gegeben, um untersuchen zu können, ob im geraden Rohr mit bestimmter Wirbelfunktion μ Strömung mit innerer Reibung unter Bestand konstanten relativen Druckabfalles möglich ist.

Diese Bestimmungsgleichung kann zweckdienlich der Darstellungsweise mit Formfunktionen angepaßt und gleichzeitig der Beweis erbracht werden, daß die Isotachengleichung:

$$\frac{\gamma\,h_w}{l}(\psi_a - \psi) = k\left[\eta\,v + \frac{\gamma\,l}{h_w}(a\,v^2 + b\,v^3 + c\,v^4 + \ldots.)\right] \quad . \quad . \quad S_I$$

mit

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = k = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_{II}$$

als Bestimmungsgleichung für ψ die Fundamentalgleichungen für Schichtströmungen in geraden Rohren mit Reibung und Turbulenz erfüllt.

Differenziert man die Gleichung S_I nach ψ, so erhält man, da infolge der Schichtströmung v nur eine Funktion von ψ ist

$$-\frac{\gamma\,h_w}{l} = k\left[\eta\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\gamma\,l}{h_w}\left(a\frac{\partial v^2}{\partial \psi} + b\frac{\partial v^3}{\partial \psi} + c\frac{\partial v^4}{\partial \psi} + \ldots.\right)\right].$$

Nach der früheren Darstellung im dreifach orthogonalen Koordinatennetz φ, ψ und χ wird

$$+\frac{\partial}{\partial \psi}(\mathfrak{v}_x \nu \sqrt{B}) = \nu k_0.$$

Mit

$$\mathfrak{v}_x = +\frac{1}{\nu\sqrt{C}}\left[\eta\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{\gamma l}{h_w}\left(a\frac{\partial v^2}{\partial \psi} + \ldots\right)\right] = \frac{-\gamma h_w}{k l}\cdot\frac{1}{\nu\sqrt{C}}$$

und

$$\sqrt{\frac{B}{C}} = \nu B$$

folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(\mathfrak{v}_x \nu \sqrt{B}) = \frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\gamma h_w}{k l}\cdot \nu B = \frac{\gamma h_w}{k l}\cdot\frac{\partial}{\partial \psi}(\nu B) = -\nu k_0 = -\nu\frac{\gamma h_w}{l}.$$

Die Funktionen ψ und χ sind miteinander durch folgende Gleichungen verbunden

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z} = -\frac{1}{\nu}$$

entsprechend der ersten der Gleichungen IV,

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$$

entsprechend der Orthogonalität von ψ und χ. Dieselben ergeben mit

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 = B$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{1}{\nu B}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = +\frac{1}{\nu B}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

oder

$$\nu B = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\frac{\partial \chi}{\partial y}} = +\frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\frac{\partial \chi}{\partial z}}.$$

Nun wird

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(\nu B) = \frac{\partial \nu B}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial \nu B}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \psi},$$

und da nach dem schon früher benutzten Schema VII Seite 60

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial \chi}{\partial z}\nu, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = -\frac{\partial \chi}{\partial z}\nu$$

sind, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(\nu B) = \frac{\partial \nu B}{\partial y}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial z}\cdot\nu - \frac{\partial \nu B}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial y}\cdot\nu.$$

Aus dem zweiten der Werte von νB folgt durch partielles Differentiieren nach y

$$\frac{\partial \nu B}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial z}} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \cdot \partial y} = \frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial z}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \nu B \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \cdot \partial y} \right)$$

und aus dem ersten der Werte von νB durch partielles Differentiieren nach z

$$\frac{\partial \nu B}{\partial z} = - \frac{1}{\frac{\partial \chi}{\partial y}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \nu B \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \cdot \partial y} \right)$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial \psi}(\nu B) = \nu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

oder

$$- \nu \frac{\gamma h_w}{l} = - \gamma \frac{h_w}{l k} \nu \nabla^2 \psi .$$

welche Gleichung mit $\nabla^2 \psi = k$ erfüllt wird; die Zulässigkeit der Isotachengleichung S_I mit S_{II} als zugeordneter Bestimmungsgleichung für die Formfunktion ψ ist hiermit begründet.

Mit $k = 4$ und $\psi = y^2 \cdot \frac{2 r_b^2}{r_a^2 + r_b^2} + z^2 \frac{2 r_a^2}{r_a^2 + r_b^2}$ geht S_I in die Isotachengleichung für das elliptische Rohr, — mit $\psi = \frac{r^2}{2}$ in jene für das kreiszylindrische Rohr über mit $a = b = c = \ldots = 0$ nimmt S_{II} die Form für Bewegungen mit Reibung allein; mit $\eta = 0$, $a = b = \ldots = 0$, $c = c$ die Form für Bewegung mit Turbulenz entsprechend der vereinfachenden Annahme $\mu = (\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}}$ an.

Verfahren der graphischen Funktionen-Addition.

Durch den Bestand der Gleichung S_{II} ist ein graphisches Verfahren für die Konstruktion der Leitlinien der ψ-Flächen in einer φ-Fläche, also der χ-Linien gesichert, nämlich die graphische Funktionen-Addition. Ist nämlich

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \ldots \psi_i + \psi_{i+1}$$

eine Summe von Funktionen von ψ, von denen ψ_1, $\psi_2 \ldots$ der Gleichung S_{II} genügen, während die übrigen der Gleichung $\nabla^2 \psi = 0$ entsprechen, so ist ersichtlich, daß auch ψ der Gleichung S_{II} genügt.

Zeichnet man nun einzeln die den Funktionen $\psi_1 \ldots \psi_i$ entsprechenden Linien in solcher Reihenfolge, daß die Funktionswerte

der Linien je eine der Funktionen ψ in arithmetischer Reihe folgen, so kann man in erster Linie diejenigen Schnittpunkte, der den Funktionen ψ_1 und ψ_2 entsprechenden Linien verbinden, deren Funktionswerte algebraisch addiert gleichen Wert ergeben; man erhält eine Kurvenschaar $\psi_1 + \psi_2$, die bereits der Gleichung S_{II} genügt, und bei fortgesetztem Verfahren erhält man wieder neue Kurvenscharen mit derselben Eigenschaft.

Als partikuläres Integral von S_{II} ist für die Bestimmung von ψ-Funktionen für Röhren, die allgemeine Kegelschnittsgleichung wichtig, die mit spezialisierten Konstanten die Kreisgleichung oder die früher angegebene Ellipsengleichung enthält; der Gleichung $\nabla \psi = 0$ entsprechen alle Linienscharen konformer Grundnetze; deren analytische Darstellung ist durch die auf Seite 72 bemerkte Eigenschaft der Funktionen komplexer Argumente gegeben: durch Beifügung einer Konstanten kann jederzeit die Wertverteilung der Funktion einem bestimmten Grenzwert angepaßt werden.

C. Stollenprofile

als Beispiel der Bestimmung von Rohrprofilen und deren Isotachen durch graphische Funktionen-Addition.

$$\psi = 0{,}0475 + [(z-1)^2 + y^2] - 0{,}48 \lg \nu(z^2 + y^2)$$

ist ein partikuläres Integral der Gleichung S_I; es wird mit $\psi_1 = [(z-1)^2 + y^2]$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 4 = k \ldots \ldots \ldots \ldots \quad S_{II}$$

$\psi_2 = 0{,}48 \lg \nu z^2 + y^2$ entspricht der Gleichung $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0$; denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial z} \lg \sqrt{z^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} + \frac{z}{z^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \lg \sqrt{z^2 + y^2} \frac{(z^2 + y^2) \cdot 1 - z^2}{z^2 + y^2} = \frac{y^2 - z^2}{(z^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \lg \sqrt{z^2 + y^2} = \frac{z^2 - y^2}{(z^2 + y^2)} \qquad \frac{\partial}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} = 0.$$

0,0475 ist eine Konstante, die für $z = 1{,}2$, $y = 0$, d. i. dem Ort des analytischen Minimalwertes von ψ, denselben zu Null macht. Unter Hinweis auf die Fig. Nr. 41 wird bemerkt:

ψ_1 wird durch Kreise dargestellt, die konzentrisch um den Punkt: $z = 1$, $y = 0$ mit dem Wert $\psi_1 = r^2$ gezogen sind; es wird für:

$\psi_1 =$	$+0{,}00$	$+0{,}10$	$+0{,}20$	$+0{,}30$	$+0{,}40$	$+0{,}50$	$+0{,}60$
$r =$	$0{,}000$	$0{,}316$	$0{,}447$	$0{,}548$	$0{,}632$	$0{,}705$	$0{,}775$

ψ_2 wird durch Kreise dargestellt, die konzentrisch um den Punkt $z = 0$, $y = 0$ gezogen sind; es wird für

$\psi_2 =$	$-0{,}20$	$-0{,}10$	$-0{,}00$	$+0{,}10$	$+0{,}20$	$+0{,}30$
$\varrho =$	$0{,}659$	$0{,}812$	$1{,}000$	$1{,}232$	$1{,}518$	$1{,}868$

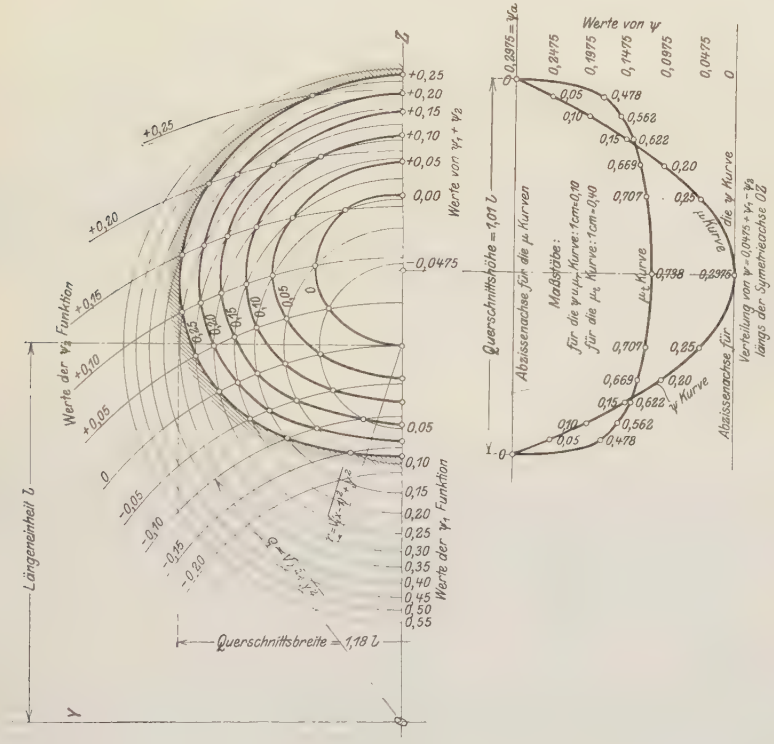
Werte von ψ
Querschnittshöhe = 1,01 l
Abszissenachse für die μ Kurven
Maßstäbe:
für die ψ1μ Kurve: 1cm=0,10
für die μ1 Kurve: 1cm=0,40
μ1 Kurve
ψ1 Kurve
ψ2 Kurve
Abszissenachse für die ψ Kurve
Verteilung von ψ = 0,0475 + ψ1 - ψ2 längs der Symmetrieachse OB
Querschnittsbreite = 1,18 l
Längeneinheit l
Werte der ψ1 Funktion
Werte der ψ2 Funktion
Werte von ψ1 + ψ2

Fig. 41.

Die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Kreise

$\psi_1 =$	$0{,}4$	$0{,}3$	$0{,}2$
$\psi_2 =$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}0$

hat wegen

$\psi_1 - \psi_2 =$	$0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}2$

und der Konstanten $= 0{,}0478$ den Wert

$$\psi = \text{konst.} + \psi_1 - \psi_2 = 0{,}2475,$$

das ist mithin der Wert der durch diese Leitlinie dargestellten Formfläche ψ usw. Es wird, wenn man die Fläche $\psi_a = 0{,}2975$ als Wandfläche der Rohre nimmt

für Strömung mit Reibung: $\mu_r = \psi_a - \psi$
für Strömung mit Turbulenz: $\mu_t = (\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}}$

Im rechtsseitigen Diagramm ist der Wertverlauf dieser Funktionen längs der Symmetrieachse des Querschnittes dargestellt; die Form der λ_t-Kurve entspricht der ausgleichenden Wirkung der Turbulenz. Die in den Figuren und Tabellen angegebenen Zahlenwerte sind Verhältniswerte, indem entsprechend der grundlegenden Annahme für die Darstellung der Funktionen φ, ψ und χ deren Veränderliche. d. h. die Koordinaten als Verhältniswerte in bezug auf eine bestimmte Längeneinheit l eingeführt sind, als welche im vorliegenden Fall die Entfernung des Mittelpunktes der ψ_1-Kreise vom Koordinatenursprung genommen ist; hierauf muß bei Benützung dieser Werte Rücksicht genommen werden.

Es werden somit, wenn l die in Metern gemessene Länge der Bezugseinheit ist:

die Breite des Querschnittes	$= 1{,}18\, l\, m$
„ Höhe „ „	$= 1{,}0\, l\, m$
der Flächeninhalt des Querschnittes f_a . . .	$= 0{,}953\, l^2\, m^2$
„ Umfang „ „	$= 3{,}480\, l\, m$
„ Profilsradius R „ „	$= 0{,}247\, l\, m$

Der Funktionsausdruck für ψ bringt in der Form

$$\psi = \left(\frac{\sqrt{0{,}0475}}{l}\right)^2 + \left[\left(\frac{z}{l} - \frac{l}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\sqrt{0{,}48}}{l}\right)^2 \lg \sqrt{\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2}\right]$$

die Eigenschaft seiner Glieder als Verhältniswerte zur Darstellung und erkennt man, daß die Überführung der Funktionswerte ins metrische Maßsystem bei der vorliegenden Form deren Multiplikation mit l^2 erfordert.

Hiermit ergibt sich die allgemeine Isotachengleichung

$$\gamma \frac{h_w}{4L} l^2 (\psi_a - \psi) = \eta v + \frac{\gamma L}{h_w} (a v^2 + b v^3 + c v^4 + \ldots.),$$

die wieder mit $a = b = c = \ldots. = 0$ für Strömung mit Reibung allein, $= 0$, $a = b = 0$, $c = c$ für Strömung mit Turbulenz unter

der bereits in den früheren Fällen vereinfachenden Annahme für λ verwendet werden kann: es werden also

$$\mu_r = l^2 (\psi_a - \psi) \quad \text{für Strömung mit Reibung,}$$
$$\mu_t = \sqrt{l} (\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}} \quad \text{„ „ „ Turbulenz}$$

und hiermit

$$v = \frac{h_w}{4 \eta L} l^2 (\psi_a - \psi) \text{ für Strömung mit Reibung,}$$

$$v = c^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{h_w}{2 L}} \sqrt{l} (\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}} \text{ für Strömung mit Turbulenz.}$$

Die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit $v_m = \frac{1}{f_a} \int_0^{f_a} v \, df$ kann nun entweder durch Integration nach Wiedereinführung des Funktionsausdruckes von ψ oder aber einfacher durch Übergang zu dem durch die Formflächen gebildeten Koordinatennetz erfolgen; die in der linken Figur 41 abgegrenzten Teilflächen haben folgende Inhalte: Die innere Fläche $0.153\, l^2$, die Ringflächen $0.160\, l^2$; das kann durch Planimetrierung ermittelt werden, ergibt sich übrigens aus der Eigenschaft der Flächenteilung durch das Netz.

Bezeichnet man allgemein den Flächeninhalt einer Teilfläche mit Δf und mit μ_{rm} resp. μ_{tm} die rechts abzulesenden Mittelwerte von μ für die einzelnen Teilflächen, so folgt wegen $v = G \cdot \mu$ für das Volumen pro Zeiteinheit (Durchflußmenge):

$$V = G \Sigma \mu_m \Delta F$$

und man erhält folgende Tabelle:

$\Delta f/l^2$	μ_{rm}/l^2	μ_{tm}/l^2	$\mu_{rm} \Delta f/l^4$	$\mu_{tm} \Delta f/l^4$
0,153	0,258	0,732	0,0436	0,1120
0,160	0,225	0,689	0,0360	0,1118
0,160	0,170	0,645	0,0272	0,1031
0,160	0,120	0,592	0,0196	0,0947
0,160	0,070	0,520	0,0112	0,0832
0,160	0,025	0,320	0,0040	0,0512
0,953	Summen		0,1416	0,5560

und dementsprechend.

$$V = 0{,}1416 \frac{\gamma h_w}{4 \eta L} \cdot l^4 \text{ für Strömung mit Reibung,}$$

$$V = 0{,}5560\, c^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{h_w}{2 L}}\, l^2 \sqrt{l} \text{ für Strömung mit Turbulenz:}$$

es ergeben sich mit $f_a = 0.954\, l^2$ für die mittleren Geschwindigkeiten die Formeln:

$$v_{mr} = 0{,}1485 \frac{\gamma}{\eta} \frac{h_w}{L} l^2 \text{ für Strömung mit Reibung,}$$

$$v_{mt} = 0{,}5835\, c^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{h_w}{2L}} \sqrt{l} \text{ für Strömung mit Turbulenz.}$$

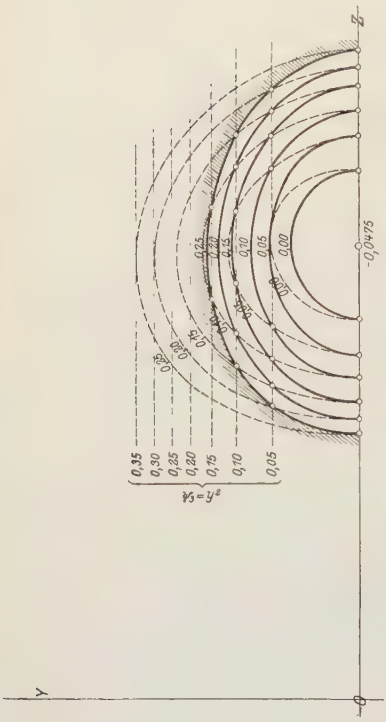

Fig. 42.

Aus der Gleichung für v_{mt} folgt:

$$c = 0{,}029 \frac{l^2}{v_{mt}^4} \cdot \left(\frac{h_w}{L}\right)^2$$

welcher Ausdruck für die Bestimmung von c durch den Versuch an einem in der vorliegenden Profilsform mit bestimmter Einheitslänge l ausgeführten Stollen von der Länge L dienlich ist; es bedarf der Messung der Durchflußmenge v und der hierzu nötigen Höhe h_w; v_{mt} ist bestimmt durch $\frac{V}{f_a}$; natürlich hat man durch Geschwindigkeitsmessungen zu kontrollieren. ob die Anordnung der Isotachen der Formel für μ_t entspricht.

Man kann c auch in Verbindung mit dem Bielschen Koeffizienten a bringen durch die Beziehung:

$$\frac{h_w}{L} = \frac{a}{R} v_{mt}^2 = \frac{a}{0{,}247\, l} v_{mt}^2 = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{0{,}029}} \cdot \frac{v_{mt}^2}{l}$$

$$c = \frac{0{,}029}{(0{,}247)^2} \cdot a^2 = 0{,}475\, a^2 .$$

Addiert man zur gefundenen ψ-Funktion graphisch $\psi_3 = y^2$ nach beistehender Fig. 42, so wird $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 6$; die neue Form erfüllt somit die Gleichung S_{II} und gibt als allgemeine Isotachengleichung

$$\frac{\gamma}{6} \frac{h_w}{L} (\psi_a - \psi) = \eta v + \frac{\gamma L}{h_w} (a v^2 = b v^3 + c v^4 + \ldots .),$$

die mit $a = b = c = \ldots = 0$ die Formen $v = \frac{\gamma}{6\eta} \frac{h_w}{L} (\psi_a - \psi)$ für Bewegung mit Reibung und vereinfacht, wie früher, mit $\eta = 0$, $a = 0$, $b = 0$, $c = c$, $v = c^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{h_w}{\sqrt{6}\, L}} (\psi_a - \psi)^{\frac{1}{4}}$ für Bewegung mit Turbulenz annimmt.

Auf diese Weise ist es möglich, breite oder hohe, oder, wenn man außerdem noch im Glied $(z-1)^2$ statt 1 einen andern Wert einsetzt, typisch eiförmige Profile zu erhalten, wie solche als Stollenprofile verwendet werden.

D. Rechteckiges Profil

als Beispiel der analytischen Bestimmung von Isotachen mittels Reihen bei gegebener Profilform.

Funktionen von der Form:

$$m_n Z_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} y\right) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{m}_n Y_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon z\right),$$

worin:

$$Z_n = e^{n\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right)} + e^{-n\left(\frac{\pi}{2} \cdot z\right)}. \qquad Y_n = e^{n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon y\right)} + e^{-n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon y\right)}$$

sind, erfüllen die Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$

bei allen Werten der Konstanten m_n, $\mathfrak{m}_n$, ε (n ist hierbei der Reihengliederindex), denn man erhält z. B.

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} m_n Y_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} z\, \varepsilon\right) = -\mathfrak{m}_n \left(n \frac{\pi}{2} \varepsilon\right)^2 Y_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon z\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} m_n Y_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon z\right) = +\mathfrak{m}_n \left(n \frac{\pi}{2} \varepsilon\right)^2 Y_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon z\right)$$

daher die Summe $= 0$.

Die Funktion $\psi_1 = k_0 + k_1 z^2 + k_2 y^2$ erfüllt mit k_0, k_1 und k_2 als Konstanten die Gleichung S_{II}, denn es wird

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 2(k_1 + k_2).$$

Mithin ist dies auch der Fall, wenn angenommen wird

$$\psi = k_0 + k_1 z^2 + k_2 y^2 + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} m_n Z_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} z\right)$$

$$+ k_4 \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}_n Y_n \cos n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon z\right),$$

es wird

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 2(k_1 + k_2).$$

Für die Werte $y = \pm 1$ und $z = \pm \frac{1}{\varepsilon}$ nehmen die Funktionen Z_n und Y_n spezielle Werte an, und zwar

$$\mathfrak{Z}_n = e^{\frac{n}{\varepsilon}\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{n}{\varepsilon}\frac{\pi}{2}}; \qquad \mathfrak{Y}_n = e^{\frac{n\pi}{2}\varepsilon} + e^{-\frac{n\pi}{2}\varepsilon},$$

die Kosinuse werden hierbei gleich Null.

Nun besteht (siehe Riemann-Weber: „Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik", Bd. I, Seite 69 und 70) die trigonometrische Reihe

$$-\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 2x - \tfrac{1}{9}\cos 3x + \tfrac{1}{16}\cos 4x - \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx = \tfrac{1}{4}x^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

mit dem Konvergenzbereich $x = \pm\pi$; man kann daher setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\left(\frac{\pi}{2}y\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}y\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\left(\frac{\pi}{2}z\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon z\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}.$$

Die Konstanten m_n und m_n seien nun durch die Gleichungen bestimmt

$$m_n \mathfrak{Z}_n = \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad m_n \mathfrak{Y}_n = \frac{(-1)^n}{n^2},$$

hiermit kann man den Ausdruck von ψ umformen; man erhält:

$$\psi = k_0 + k_1 z^2 + k_2 y^2 + k_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{Z_n}{\mathfrak{Z}_n}\right)\cos n\left(\frac{\pi}{2}y\right)$$
$$+ k_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\frac{Y_n}{\mathfrak{Y}_n}\cos n\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon z\right).$$

und es ergeben sich unter Berücksichtigung obiger Reihensummen als Funktionswerte für ψ bei $y = \pm 1$ also

$$\frac{Y_n}{\mathfrak{Y}_n} = 1, \qquad \cos n\left(\frac{\pi}{2}\right)y = 0.$$

$$\psi_I = k_0 + k_1 z^2 + k_2 + k_4\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon z\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right],$$

bei $z = \pm\frac{1}{\varepsilon}$ also $\frac{Z_n}{\mathfrak{Z}_n} = 1, \quad \cos n\left(\frac{\pi}{2}\right)\varepsilon z = 0,$

$$\psi_{II} = k_0 + \frac{k_1}{\varepsilon^2} + k_2 y^2 + k_3\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}y\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}\right];$$

werden nun

$$k_4 = -k_1 \frac{4}{\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon\right)^2} \quad \text{und} \quad k_3 = -\frac{4}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

eingesetzt, so verschwinden die Glieder mit y^2 und z^2 und es folgt

$$\psi_I = k_0 + k_2 + k_4 \frac{\pi^2}{12} = k_0 + k_2 + k_1 \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{12}$$

$$= k_0 + k_2 + \frac{4}{3\varepsilon^2} k,$$

$$\psi_{II} = k_0 + \frac{k_1}{\varepsilon^2} - k_3 \frac{\pi^2}{12} = k_0 + \frac{k_1}{\varepsilon^2} + k^2 \frac{4 \cdot 4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{12}$$

$$= k_0 + \frac{k_1}{\varepsilon^2} + \frac{4}{3} k_2.$$

Wird noch $k_1 = \varepsilon^2 k_2$ und k_2 als willkürliche Konstante $= 1$ gesetzt, so ergibt sich

$$k_4 = k_3 = -4\left(\frac{+4}{\pi}\right)^2 \quad \text{und} \quad \psi_I = \psi_{II} = k_0 + \left(1 + \frac{4}{3}\right)$$

als Funktionswert von ψ sowohl bei $y = \pm 1$ als auch bei $z = \pm \frac{1}{\varepsilon}$, d. h.

ψ hat längs der Geraden $y = \pm 1$ parallel zur Z-Achse

und „ „ „ $z = \pm \frac{1}{\varepsilon}$ „ „ Y- „

denselben Wert oder mit andern Worten, das durch diese Geraden abgegrenzte Rechteck ist die Leitlinie einer ψ-Fläche mit Erzeugenden parallel zur X-Achse und kann dieselbe als Wandfläche eines Kanals mit rechteckigem Profil im Seitenverhältnis $\frac{2y}{2z} = \frac{\varepsilon}{1}$ genommen werden.

Für $z = 0$ und $y = 0$ nehmen Z_n und Y_n durchweg den Wert 2 und die Kosinuse den Wert 1 und daher die Summen die Formen an:

$$\Sigma \mathrm{I} = \Sigma \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{2}{\mathfrak{Z}_n} \quad \text{resp.} \quad \Sigma \mathrm{II} = \Sigma \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{2}{\mathfrak{Y}_n},$$

deren Glieder sehr rasch mit wachsendem n klein werden, da n und $\mathfrak{Y}_n$ resp. $\mathfrak{E}_n$ im Nenner sind.

Soll nun im Koordinatenursprung $\psi = 0$ werden, so muß sein:

$$k_0 = -k_3 \Sigma \mathrm{I} - k_4 \Sigma \mathrm{II} = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 (\Sigma \mathrm{I} + \Sigma \mathrm{II})$$

und folgt hiermit als endgültige Formel für ψ' zur Bestimmung der obigen Leitlinien:

$$\psi' = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\sum_1^\infty \mathrm{I} + \Sigma\,\mathrm{II}\right) + (z^2 \quad \varepsilon^2 y^2) - 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{Z_n}{\mathfrak{Z}_n} \cos\frac{\pi}{2} n y$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{Y_n}{\mathfrak{Y}_n} \cos n\left(\frac{\pi}{2} \varepsilon z\right)\Big].$$

Ferner:

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = 2(1 + \varepsilon^2)$$

$$\psi_a = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{II}\right) + \left(1 + \frac{4}{3}\right)$$

$$\psi_a - \psi = \frac{7}{3} - (z^2 + \varepsilon^2 y^2) + 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{Z_n}{\mathfrak{Z}_n} \cos\frac{\pi}{2} n y$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{Y_n}{\mathfrak{Y}_n} \cos\frac{\pi}{2} n \varepsilon z\Big].$$

Die Isotachengleichung wird

$$\frac{\gamma h_w}{2(1+\varepsilon^2) L}(\psi_a - \psi) = \eta v + \frac{\gamma L}{h_w}(a v^2 + b v^3 + c v^4 + \ldots)$$

und hiermit spezialisiert wie früher:

$$v = \frac{\gamma h_w}{2(1+\varepsilon^2)\eta L}(\psi_a - \psi) \text{ für Bewegung mit Reibung.}$$

$$v = c^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{h_w}{\sqrt{2(1+\varepsilon^2)} L}} \cdot (\psi'_a - \psi)^{1/4} \text{ für Bewegung mit Turbulenz.}$$

Für die rechnerische Verwendung ist noch die Einheitslänge l einzuführen; es ist die Länge der in der Y-Achse liegenden Halbachse des Rechteckes; die Funktionswerte von ψ' sind wieder mit l^2 zu multiplizieren und dementsprechend die letzten Ausdrücke für v mit l^2 resp. $l\sqrt{l}$.

Die Bestimmung der Durchflußmenge wird nach Zeichnung der Netzlinien, wie im früheren Beispiel, durch Planimetrierung und Berechnung der Teilvolumina entsprechend den allgemeinen Gleichungen erfolgen:

$$\Delta V = v \Delta f; \qquad V = G \Sigma \mu_m \Delta f.$$

und da die Rechtecksfläche $f_a = 4\, y_a \cdot z_a = 4\,\frac{l^2}{\varepsilon}$ ist, folgt:

$$v_{mr} = \frac{\varepsilon}{8\,(1+\varepsilon^2)}\,\frac{\gamma\, h_w}{\eta\, L}\cdot l^2\, \Sigma \mu_{rm}\, \Delta f \quad \text{für Strömung mit Reibung}$$

$$v_{mt} = \frac{\varepsilon}{4}\cdot c^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{h_w}{\sqrt{2\,(1+\varepsilon^2)}\,L}}\cdot \sqrt{l}\, \Sigma \mu_{tm}\, \Delta f \quad \text{für Strömung mit Turbulenz.}$$

Mit $\varepsilon = 2$ erhält man $f_a = 2\,l^2$ und bei Beschränkung der Rechnung auf drei Reihenglieder $\psi_a = 1{,}073$ und hiermit bei Teilung des Rechteckes in sechs Teilflächen:

$$v_{mr} = 0{,}0527\,\frac{\gamma\, h_w}{\eta\, L}\, l^2 \quad \text{resp.} \quad v_{mt} = 0{,}650\, c^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{h_w}{2\,L}}\cdot\sqrt{l}\,.$$

Da

$$\frac{Z_n}{\mathfrak{Z}_n} = \frac{e^{n\frac{\pi}{2}z} + e^{-n\frac{\pi}{2}z}}{e^{\frac{n}{\varepsilon}\cdot\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{n}{\varepsilon}\cdot\frac{\pi}{2}}} = e^{n\frac{\pi}{2}\left(z-\frac{1}{\varepsilon}\right)}\,\frac{1+e^{-n\pi z}}{1+e^{-\frac{n\pi}{\varepsilon}}}$$

und ebenso

$$\frac{Y_n}{\mathfrak{Y}_n} = e^{n\frac{\pi}{2}(y-1)}\,\frac{1+e^{n\pi\varepsilon y}}{1+e^{n\pi\varepsilon}} = e^{-n\frac{\pi}{2}(y-1)}\,\frac{e^{n\pi\varepsilon y}+1}{e^{n\pi\varepsilon}+1}$$

werden und innerhalb des Rechteckes $y < 1$; $z < \frac{1}{\varepsilon}$ sind, so ist zu erkennen, daß die Werte dieser Glieder mit wachsendem n abnehmen, und da dieselben in der Summe noch mit $\frac{1}{n^2}$ multipliziert sind, so wird hierdurch die Konvergenz rasch gesteigert; so daß bei konkreten Rechnungen die Gliederzahl auf drei bis vier beschränkt werden kann.

Die Form der durch diese Gleichung bestimmten ψ-Linien nähert sich gegen den Rand zu dem Rechteck, gegen die Mitte der Ellipsenform mit dem Halbachsenverhältnis $1:\varepsilon$; die Koordinatenachsen Y, Z sind Symmetrieachsen der Leitlinienschar. Dies wurde erreicht durch Verlegung des $\psi = 0$-Wertes in den Koordinatenursprung; eine andere Zuordnung hätte unsymmetrische Verteilung der Leitlinien ergeben; symmetrische Verteilung erfordert auch symmetrische Zuströmung.

Versuche über die Geschwindigkeitsverteilung im geschlossenen rechteckigen Kanal liegen nicht vor, hingegen solche in offenen Kanälen:

Die Resultate der Versuche von Dr.-Ing. Kaplan, die in der Z. d. Ver. deutsch. Ing. Bd. 56, Nr. 39 im Artikel „Die Gesetze der Flüssigkeitsströmung bei Berücksichtigung der Flüssigkeitsreibung und Wandreibung" veröffentlicht sind, stehen hinsichtlich der Verteilung

und der Form der Isotachen in Wandnähe in guter Übereinstimmung mit den theoretischen Resultaten.

In den Figuren Nr. 43 und 44 sind Isotachen dargestellt, die aus Versuchen im Kanal der hydraulischen Abteilung des Maschinen-

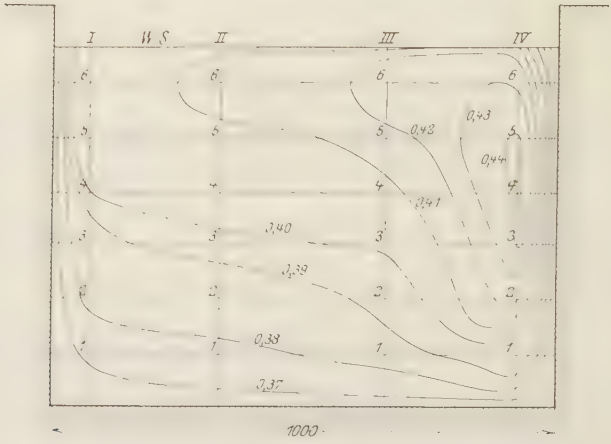

Fig. 43.

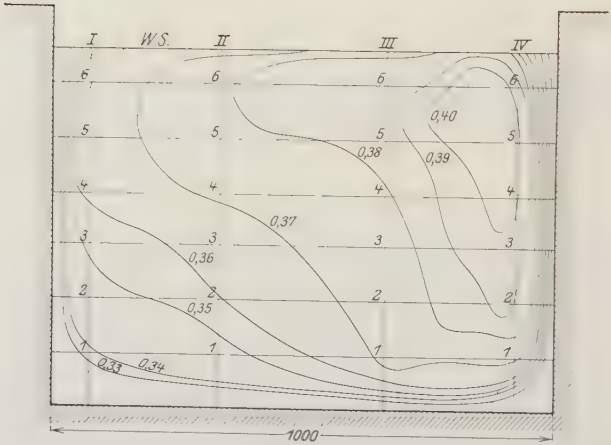

Fig. 44.

laboratoriums der eidgenössischen technischen Hochschule in Zürich abgeleitet wurden; dieselben zeigen exzentrische Strömung, jedoch typisch die gedrängte Verteilung in der Wandnähe.

Mit diesem letzten Beispiel ist gezeigt, wie durch Anwendung der Hilfsfunktionen Z_n und Y_n unter Benützung passender Reihen die φ-Funktion für bestimmte Rohrformen ermittelt werden kann.

Die Linienscharen dieser Hilfsfunktionen gehören konformen Grundnetzen an und ist aus der Form der Gleichung für φ zu erkennen, daß die Schlußform wieder durch Addition der Funktion ψ mit den Hilfsfunktionen entsteht und daher auch graphisch bestimmt werden kann.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Untersuchungen am geraden Rohr sind folgende:

Die Strömung in geraden Rohren kann als geradlinige Parallelströmung entsprechend der Formfunktion $\varphi = s$ betrachtet werden; hiermit ist dieselbe der Form nach eine Potentialströmung.

Für jedes Profil können Formfunktionen ψ gefunden werden von der Eigenschaft, daß die Strömungsgeschwindigkeit in diesen Flächen ψ konstant anzunehmen ist; die ψ-Flächen sind demnach gleichzeitig Isotachenflächen. Für die Verteilung der Geschwindigkeit auf die einzelnen Flächen sind Funktionen μ bestimmbar, die selbst φ als Argument besitzen und je nach dem Vorhandensein von Reibung allein oder auch von Turbulenz bestimmte Formen annehmen, die mathematisch mit beliebiger Annäherung beschrieben werden können.

Es charakterisieren somit die Isotachen die Art der Widerstände und kann deren experimentelle Bestimmung eine Grundlage liefern für die weitere Erforschung des Wesens der Widerstände. Siehe hierüber auch die von Kaplan an angegebener Stelle entwickelten Anschauungen.

Für die Aufzeichnung ist natürlich das graphische Verfahren des Beispiels der Stollenprofile das günstigste; die exakte Bestimmung der Isotachen auf dem Versuchswege erscheint geeignet, über die Verteilung der Widerstände bei verschiedenen Profilen zweckdienlichen Aufschluß zu geben.

Es liegt nun nahe, diese Ergebnisse auf andere Strömungsformen auszudehnen.

3. Meridionale Strömungen in Rotationshohlräumen.

Hierunter sind solche Strömungen verstanden, bei denen im ganzen Strömungsgebiet die Geschwindigkeitskomponenten der Hauptströmung nur in Meridianebenen liegen; sind hierbei Form und Geschwindigkeitsverhältnisse in allen Meridianebenen kongruent, so ist die Strömung vollkommen achsensymmetrisch; für die mathematische Darstellung der Formfunktionen wird am zweckmäßigsten das Zylinderkoordinatensystem verwendet mit x als Achsenkoordinate, r als Radius, q als Bogenkoordinate.

A. Die Bestimmung der Formfunktionen.

Die Bahnlinien sind die Schnittlinien von Umdrehungsflächen mit Meridianebenen; werden erstere als ψ-Flächen, letztere als χ-Flächen eingeführt, entsprechend den Beispielen II Seite 79 u. f. über Netzkonstruktionen, so wird $\chi = q$; hiermit

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial q} = 1.$$

Aus den Gleichungen IV$'_z$, Seite 86 folgen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\nu \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= +\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}\nu \\ \frac{\partial \varphi}{\partial q} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV}_r$$

und durch wechselseitiges partielles Differentiieren die simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} &= +\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} &= -\frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad V_{ra}$$

als Bestimmungsgleichungen für die Funktionen φ und ψ.

Mit $\nu =$ konst. erhält man Potentialformen; die Gleichungen V_{ra} reduzieren sich auf

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r} &= 0\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad V_{rp}$$

oder mit kürzerer Bezeichnung

$$\nabla^2\varphi = 0; \quad \nabla^2\psi = 0.$$

Bezüglich der analytischen Bestimmung der Funktionen φ und ψ für Potentialformen wird auf die Studie des Verfassers „Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen", Schweiz. Bauzeitung Bd. XLI, sowie auf Lambs Hydrodynamik S. 146 f. verwiesen; solche Funktionen wurden zuerst von Stokes bestimmt und deren analytische Theorie ausführlich von Sampsun in „On Stokes' Corrent-funktion" (Phil. Trans. 1891) behandelt.

Durch weitere spezielle Annahmen für die Funktion ν erhält man andere koordinierte Gleichungen, z. B. $\nu = R$ gleich einer Funktion von r gibt

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{R'}{R}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\left(\frac{1}{r}-\frac{R'}{R}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$$

mit $R = kr$, worin k eine Konstante ist, wird $\frac{1}{r}-\frac{R'}{R} = 0$ und man erhält

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = 0.$$

Das sind dieselben Bestimmungsgleichungen wie für rein zweidimensionale Potentialformen; für meridionale Strömungen geben dieselben nicht mehr Potentialströmungen.

Von Bedeutung ist der Fall $\nabla^2 \varphi = K =$ konst., da nach den allgemeinen Bestimmungen auf Seite 130 bei solchen Formen widerstandsfreie Bewegung möglich ist.

Das partikuläre Integral dieser Gleichung ist

$$\varphi_1 = ax^2 + br^2 + cx + d$$

mit a, b, c, d als Konstanten, man erhält

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 2a \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} &= 2b \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 2c \end{aligned}\right\} \nabla^2 \varphi = 2a + 4b = K.$$

Andere Formen, die der Gleichung $\nabla^2 \varphi = K$ entsprechen, erhält man, wenn man setzt $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$, wobei φ_2 als Potentialfunktion zu wählen ist.

Diese Formen werden für die Bestimmung von Schichtströmungen dienlich sein, bei denen λ als eine Funktion von ψ einzuführen sein wird.

Für die graphische Bestimmung von Potential- und anderen Formen bei bekannten ν ist das auf Seite 82 geschilderte Verfahren anzuwenden.

Ebenso können zusammengesetzte Formen durch graphische Addition einfacherer Formen erhalten werden, wobei jedoch Achsengemeinschaft zu bewahren ist.

Die hydraulische Strömungsgleichung bleibt dieselbe wie früher, wenn man das Strömungsgebiet auf einen elementaren Kanal um die Achse oder um irgendeine beliebige Bahn-(φ-)Linie beschränkt.

Widerstandsfreie Strömung ist möglich bei allen Potentialformen und den durch $\nabla^2 \Phi = K =$ konst. bestimmten Formen.

Nach erfolgter Wahl von Φ ist die Funktion ν aus der Gleichung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial r} = K\nu$$

und daraus mit der zweiten Gleichung V_{ra} die Funktion ψ zu bestimmen.

B. Strömungen mit Widerständen.

Es kommen zwei Hauptarten von Strömungen in Betracht:

1. Strömungen in Formen, bei denen auch widerstandsfreie Bewegung möglich ist; bei Auftreten von Widerständen tritt Schichtströmung ein.

2. Strömungen, bei denen von vornherein widerstandsfreie Bewegung unmöglich ist.

Strömungen der ersten Art.

In Gleichung XXIII sind die Komponenten von W in analoger Weise zu ersetzen wie beim geraden Rohr; man erhält bei Weglassung von $g dh$, d. h. bei Vernachlässigung der Schwerkraftskomponenten die Gleichung:

$$d\left(\frac{g}{\gamma}p\right) + d\frac{v^2}{2} + \Phi d\varphi + dU = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXXIII}_m$$

Bei Auflösung nach den Differentialen der Variablen φ, ψ, χ und Trennung in die drei simultanen Differentialgleichungen entfällt wegen Kongruenz der Zustände an jedem Parallelkreise diejenige, die die partiellen Ableitungen nach χ enthält; es bleiben

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{g}{\gamma}p + \frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial\psi}\frac{g}{\gamma}p + \frac{\partial}{\partial\psi}\cdot\frac{v^2}{2} + \frac{\partial U}{\partial\psi} = 0.$$

Durch Integration und mit $v = G\sqrt{A}\mu$ erhält man:

$$\frac{g}{\gamma}\cdot p + G^2\cdot\frac{A}{2}\mu^2 + \int \Phi d\varphi + U = \text{konst.} \quad . \quad . \quad \text{XIII}_m^*$$

mit $\mu = \frac{\lambda}{\nu}$, worin $\nu =$ einer Konstanten oder gleich einer Funktion ist, die aus der Differentialgleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\nu}{\partial r} = K\nu$ ($K =$ Konstante), erhalten wird, entsprechend $\nabla^2\varphi = K$.

Bestimmung der Oberflächenkräfte[1]).

Zur Orientierung, ob die Funktionen Φ und U in ähnlicher Weise zu wählen sind wie beim geraden Rohr oder ob prinzipielle

[1]) Ausgebildete Theorien ähnlichen Ranges, wie für das gerade Rohr liegen für solche allgemeinere Strömungsformen nicht vor. Hingegen hat Dr.-techn. Hampel in den „Technischen Blättern", Vierteljahrsschrift des „Deutschen Polytechnischen Vereins" in Böhmen, in den Jahrgängen 1906 und 1908

Verschiedenheit vorliegt, sind die Oberflächenkräfte an einem dreifach orthogonalen Element zu bestimmen; man könnte hierfür wieder das durch Zylinderkoordinaten begrenzte Element δ_s, $r\,\delta q$, δr in Betracht ziehen, es erscheint aber zweckmäßiger ein durch die Netzlinien der Formfunktionen begrenztes Element zu benützen. Wegen der den Formfunktionen entsprechenden dreifachen Orthogonalität zwischen den Funktionen A, B, C ist: $A = r^2 BC$, worin

$$C = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{r\,\partial q}\right)^2,$$

mit $\chi = q$ erhält man

$$C = \frac{1}{r^2}, \qquad \text{also } B = \frac{r^2}{\nu} A.$$

Man kann sich die Verteilung dieser Funktionen im Stromgebiet durch Aufzeichnung der Flächen gleicher Werte von A, B, C veranschaulichen; es kommen dann jedem Punkt bestimmte Funktionswerte φ, ψ, χ, A, B, C und ν zu.

Die mittleren Längen der Netzkanten eines von je zwei benachbarten φ-, ψ- und χ-Flächen gebildeten Elementes haben nach den Gleichungen VIII die Werte:

$$\delta s_\varphi = \frac{1}{\sqrt{A}}\delta_\varphi, \qquad \delta s_\psi = \nu\sqrt{\frac{C}{A}}\cdot\delta_\psi = \frac{\nu}{r\sqrt{A}}\delta_\psi,$$

$$\delta s_\eta = \nu\sqrt{\frac{B}{A}}\delta_\chi = r\,\delta_\chi;$$

die denselben entsprechenden Flächen sind;

$$\delta f_\varphi = \delta s_\psi \cdot \delta s_\chi = \frac{\nu}{\sqrt{A}}\delta_\psi\delta_\chi, \qquad \delta f_\psi = \delta s_\chi \delta s_\varphi = r\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}\delta_\varphi\delta_\chi,$$

$$\delta f_\chi = \delta s_\varphi \cdot \delta s_\psi = \frac{\nu}{r\,A}\delta_\varphi\delta_\psi.$$

---

eine Reihe von Versuchen unter dem Titel „Experimentelle Studien über Wasserbewegungen“ veröffentlicht, bei denen die Strömungsform ebenfalls durch Farbbänder sichtbar gemacht und photographisch fixiert wurde; an Diagrammen, die durch Rechnung aus den Versuchsresultaten abgeleitet wurden, ist der Strömungsverlauf durch Stromlinien, Isotachen und Niveaukurven ersichtlich gemacht.

Die Versuche an konischdivergenten Rohren weisen Erscheinungen auf, die jenen der Figur 2 auf Seite 2 ähnlich sind, d. h. es zeigt sich eine Ablösung der Hauptströmung von der Wand, während dies bei konischkonvergenten Rohren nicht der Fall ist.

Es sind auch die Versuchsergebnisse an geraden Rohren und an Rohren mit zentrisch eingebauten Ventilen dargestellt und beschrieben und wird an dieser Stelle auf diese Publikationen besonders aufmerksam gemacht.

das Volumelement wird

$$\delta_\tau = \delta s_\varphi \, \delta s_\psi \, \delta s_\chi = \frac{\nu}{\sqrt{A}} \delta_\varphi \, \delta_\psi \, \delta_\chi ,$$

das Massenelement

$$\delta_m = \frac{\gamma}{g} \delta \tau = \frac{\gamma}{g} \frac{\nu}{A} \delta_\varphi \, \delta_\psi \, \delta_\chi .$$

Die Bezeichnung der an einem solchen Element wirksamen Pressungen p und Spannungen $\mathfrak{p}$ ergibt sich aus beistehender Fig. 45 und dem Schema

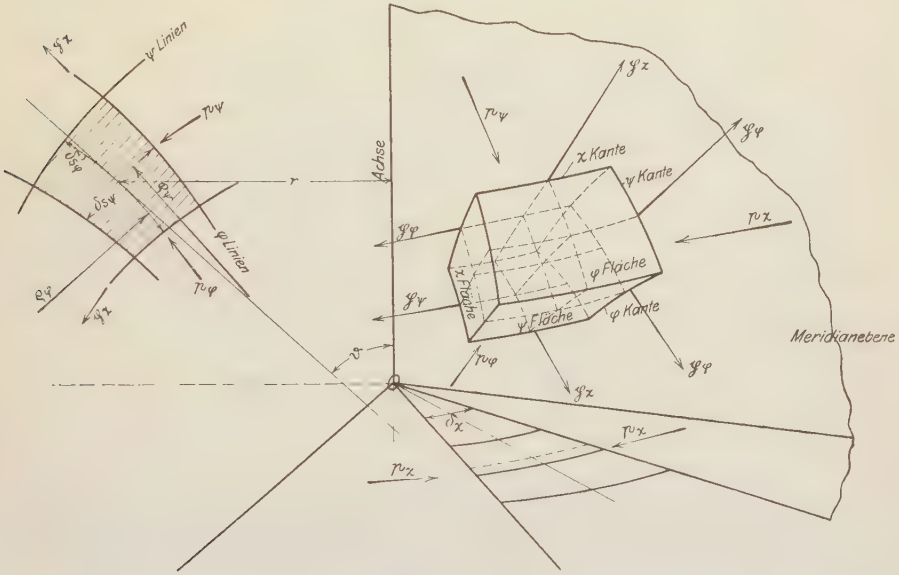

Fig. 45.

Es wirken in Richtungen Netzlinien . .	φ	ψ	χ
In der Fläche δf_φ	p_φ	$\mathfrak{p}_\chi$	$\mathfrak{p}_\psi$
In der Fläche δf_ψ	$\mathfrak{p}_\chi$	p_ψ	$\mathfrak{p}_\varphi$
In der Fläche δf_χ	$\mathfrak{p}_\psi$	$\mathfrak{p}_\varphi$	p_χ

Bei den vorliegenden Stromformen und der Annahme des Bestandes von Schichtströmung werden wieder $\mathfrak{p}_\varphi$, $\mathfrak{p}_\chi$ und alle partiellen Ableitungen nach χ gleich Null zu setzen sein; es wird jedoch bei Aufstellung des Schemas für die Oberflächenkräfte vorerst hierauf

Tabelle der

Herrührend von	In Richtung der φ-Linien wirksam
p_φ in den φ-Flächen . .	$-\frac{\partial(\delta f_\varphi)p_\varphi}{\partial\varphi}\delta_\varphi = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\nu}{\sqrt{A}}p_\varphi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
p_ψ „ „ ψ- „ . .	$+p_\psi(\delta f_\psi)\frac{\delta s_\psi}{\varrho_\psi} = +\frac{p_\psi}{\varrho_\psi}\cdot\frac{\nu}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
p_χ „ „ χ- „ . .	$p_\chi(\delta f_\chi)\frac{\delta s_\chi}{r}\sin(\vartheta) = +\frac{p_\chi}{r}\cdot\frac{\sin(\vartheta)\cdot\nu}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
$\mathfrak{p}_\varphi$ in den φ-Flächen . .	senkrecht zu den φ-Linien
$\mathfrak{p}_\varphi$ „ „ χ- „ . .	
$\mathfrak{p}_\psi$ in den χ-Flächen . .	$-\frac{\partial(\delta f_\chi)\mathfrak{p}_\chi\delta_\chi}{\partial\chi} = -\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{\nu}{rA}\mathfrak{p}_\psi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
$\mathfrak{p}_\psi$ „ „ φ- „ . .	senkrecht zu den φ-Linien
$\mathfrak{p}_\chi$ in den φ-Flächen . .	$+\mathfrak{p}_\chi(\delta f_\varphi)\frac{\delta s_\varphi}{\varrho_\varphi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\varphi}\frac{\nu}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
$\mathfrak{p}_\chi$ in „ ψ- „ . .	$-\frac{\partial(\delta f_\chi)\mathfrak{p}_\chi}{\partial\psi}\delta_\psi = -\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\mathfrak{p}_\chi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$

keine Rücksicht genommen, sondern die Spezialisierung nachträglich eingeführt; ebenso wird noch ν allgemein beibehalten, das bei Potentialformen gleich einer Konstanten ist.

Bei Bestimmung der Einzelwerte der Komponenten der Oberflächenkräfte sind Größen, die unendlich klein von mehr als dritter Ordnung sind, vernachlässigt und Bogendifferentiale durch den Quotienten Bogenlänge: Krümmungsradius ersetzt, z. B. geben die Pressungen $(p_\psi\delta f_\psi)$ und $(p_\psi\delta f_\psi + \frac{\partial(p_\psi\delta f_\psi)}{\partial\psi}\delta_\psi$ in der Richtung φ infolge ihrer gegenseitigen Neigung im Bogenbetrage $\frac{\delta_{s\psi}}{\varrho_\psi}$ eine Komponente,

Oberflächenkräfte.

In Richtung der ψ-Linien wirksam	In Richtung der χ-Linien wirksam
$-\mathfrak{p}_\varphi(\delta f_\varphi)\frac{\delta s_\varphi}{\varrho_\varphi} = -\frac{p_\varphi}{\varrho_\varphi}\frac{\nu}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$ $-\frac{\partial(\delta f_\psi)p_\psi}{\partial\psi}\delta_\psi = -\frac{\delta}{\partial\psi}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}p_\psi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$	senkrecht zu den χ-Linien
$+p_\chi(\delta f_\chi)\frac{\delta s_\chi}{r}\cos\vartheta = +\frac{p_\chi}{r}\frac{\cos(\vartheta)r}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$	$-\frac{\partial(\delta f_\chi)p_\chi}{\partial\chi}\delta_\chi = -\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{r}{rA}p_\chi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
senkrecht zu den ψ-Linien	$-\frac{\partial(\delta f_\psi)\mathfrak{p}_\varphi}{\partial\psi}\delta_\psi = -\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\mathfrak{p}_\varphi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
$-\frac{\partial(\delta f_\chi)\mathfrak{p}_\varphi}{\partial\chi}\delta_\chi = -\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{\nu}{rA}\mathfrak{p}_\eta\right)\delta_\eta\delta_\psi\delta_\chi$	$-\mathfrak{p}_\eta(\delta f_\chi)\frac{\delta s_\chi}{r} = -\mathfrak{p}_\eta\frac{\nu}{rA}\delta_\eta\delta_\psi\delta_\chi$
senkrecht zu den ψ-Linien	senkrecht zu den χ-Linien $-\frac{\partial(\delta f_\varphi)\mathfrak{p}_\psi}{\partial\varphi}\delta_\varphi = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\nu}{\sqrt{A}}\mathfrak{p}_\psi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$
$-\frac{\partial(\delta f_\varphi)\mathfrak{p}_\chi}{\partial\varphi}\delta_\varphi = -\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\nu}{\sqrt{A}}\mathfrak{p}_\chi\right)\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$ $-\mathfrak{p}_\chi(\delta f_\psi)\frac{\delta s_\psi}{\varrho_\psi} = -\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\psi}\cdot\frac{\nu}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$	senkrecht zu den χ-Linien

für deren Bestimmung das Glied $\frac{\partial(p_\psi\delta f_\psi)}{\partial\psi}\delta_\psi$ vernachlässigt und der Komponententeil mit

$$p_\psi\delta f_\psi\cdot\frac{\delta s_\psi}{\varrho_\psi} = \frac{p_\psi}{\varrho_\psi}\cdot\frac{\nu}{A}\delta_\varphi\delta_\psi\delta_\chi$$

eingesetzt wird; es würde nämlich dieses Glied multipliziert mit dem Bogenanteil von $\frac{\delta_s\psi}{\varrho_\psi}$ unendlich klein vierter Ordnung.

Für die achsensymmetrische Meridionalströmung wird

$$\mathfrak{p}_\varphi = 0, \qquad \mathfrak{p}_\psi = 0,$$

es verschwinden alle partiellen Ableitungen nach χ: man erhält demzufolge:

$$P_\varphi \quad \left[-\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\nu p_\varphi}{\sqrt{A}}\right) + \frac{p_\psi}{\varrho_\psi}\frac{\nu}{\sqrt{A}} + \frac{p_\chi \nu}{r}\cdot\frac{\sin(\vartheta)}{A} + \frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\varphi}\frac{\nu}{A} - \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\mathfrak{p}_\chi\right)\right]\delta_\varphi\,\delta_\psi\,\delta_\chi$$

$$P_\psi \quad \left[-\frac{p_\varphi}{\varrho_\varphi}\frac{\nu}{\sqrt{A}} - \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{r}{A}\mathfrak{p}_\psi\right) + \frac{p_\chi \nu}{r}\frac{\cos(\vartheta)}{A} - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{\sqrt{A}}\right) - \frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\psi}\cdot\frac{\nu}{A}\right]\delta_\varphi\,\delta_\psi\,\delta_\chi$$

$$P_\chi \quad 0.$$

Die Komponenten von W in den Richtungen der Netzlinien ergeben sich wie folgt[1])

$$W_\varphi = \Phi\sqrt{A} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\sqrt{A},$$

$$W_\psi = G^2\frac{A}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial \psi}\frac{r}{\nu}\sqrt{A} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{r}{\nu}\sqrt{A}.$$

und

$$W_\chi = G^2\cdot\frac{A}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial \chi}\cdot\frac{1}{r} + \frac{\partial U}{\partial \chi}\cdot\frac{1}{r}$$

W_χ wird gleich Null, da alle partiellen Ableitungen nach beiden vorliegenden Strömungsformen gleich Null sind.

[1]) Von der Richtigkeit obiger Ansätze kann man sich überzeugen, wenn man die Transformation aus dem kartesischen Koordinatensystem in die Netzkoordinaten vornimmt; es wird z. B.:

$$W_\varphi = W_x\cos(\varphi x) + W_y\cos(\varphi y) + W_z\cos(\varphi z)$$

$$= W_x\frac{\alpha_1}{\sqrt{A}} + W_y\frac{\alpha_2}{\sqrt{A}} + W_z\,\alpha_3\sqrt{A},$$

mit

$$W_x = \frac{W_s}{\sqrt{A}}\alpha_1 + T_x, \qquad W_y = \frac{W_s}{\sqrt{A}}\alpha_2 + T_y, \qquad W_z = \frac{W_s}{\sqrt{A}}\alpha_3 + T_z$$

wird

$$W_\varphi = W_s\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{A} + T_x\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{A}} + T_y\cdot\frac{\alpha_2}{\sqrt{A}} + T_z\cdot\frac{\alpha_3}{\sqrt{A}}$$

oder wegen $\frac{W_s}{\sqrt{A}} = \Phi$

$$W_\varphi = \Phi\sqrt{A} + T_x\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{A}} + T_y\cdot\frac{\alpha_2}{\sqrt{A}} + T_z\cdot\frac{\alpha_3}{\sqrt{A}}.$$

Nun sind

$$T_x = G^2\cdot\left(\frac{A}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial x} + \mu^2\triangle\alpha_1\right) + \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

und wegen $\mu = \frac{\lambda}{\nu}$

$$\frac{\partial \mu^2}{\partial x} = \frac{1}{\nu^2}\frac{\partial \lambda^2}{\partial \psi}\beta_1 - \frac{\lambda^2}{\nu^3}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

Die Bewegungsgleichungen für das Element $\delta s_\varphi \cdot \delta s_\psi \cdot \delta s_\chi$ nehmen die Form an (bei Weglassung der Schwerkraftskomponente)

$$-W_\varphi \delta_m - \frac{\partial p(\delta f_\varphi)}{\partial \varphi}\delta_\varphi + p(\delta f_\psi)\frac{\delta s_\psi}{\varrho_\psi} + p(\delta f_\chi)\frac{\delta s_\chi}{r}\sin\vartheta = \frac{dv}{dt}\delta_m$$

$$-W_\psi \delta_m - p(\delta f_\varphi)\frac{\delta s_\varphi}{\varrho_\varphi} - \frac{\partial(p\delta f_\psi)}{c\psi}\delta_\psi + p(\delta f_\chi)\frac{\delta s_\chi}{r}\cos\vartheta = -\frac{v^2}{\varrho}\delta_m$$

die dritte Gleichung entfällt.

Nach Einsetzen der Werte für δ_m und für die Flächenelemente folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\gamma}{g}\frac{W_\varphi}{A} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p\cdot\nu}{\sqrt{A}}\right) + \frac{p}{\varrho_\psi}\frac{\nu}{A} + \frac{p\nu}{r}\frac{\sin\vartheta}{A} = \frac{\gamma}{g}\frac{dv}{dt}\frac{1}{A} \\ &\frac{\gamma}{g}\frac{W_\psi}{A} - \frac{p}{\varrho_\varphi}\frac{\nu}{\sqrt{A}} - \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{r}{\sqrt{A}}\cdot p\right) + \frac{p\nu}{r}\frac{\cos\vartheta}{A} = -\frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{\varrho_\varphi}\cdot\frac{1}{A} \end{aligned}\right\} \quad \text{I}$$

Es muß ferner sein:

$$P_\varphi = \frac{dv}{dt}\delta_m, \qquad P_\psi = -\frac{v^2}{\varrho}\delta_m$$

und somit

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\left(\frac{p_\varphi\nu}{\sqrt{A}}\right) + \frac{p_\psi}{\varrho_\psi}\cdot\frac{\nu}{A} + \frac{p_\chi}{r}\cdot\nu\cdot\frac{\sin\vartheta}{A} + \frac{p_\chi}{\varrho_\varphi}\cdot\frac{\nu}{A} - \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{p_\chi r}{\sqrt{A}}\right) = \frac{\gamma}{g}\frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{A} \\ &-\frac{p_\varphi}{\varrho_\varphi}\cdot\frac{\nu}{A} - \frac{\partial}{\partial\psi}\cdot\left(\frac{r}{\sqrt{A}}p_\psi\right) + \frac{p_\chi\nu\cos\vartheta}{r\cdot A} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{p_\chi\nu}{\sqrt{A}}\right) - \frac{p_\chi}{\varrho_\psi}\frac{\nu}{A} = -\frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{\varrho_\varphi}\frac{1}{A} \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

---

es wird

$$T_x\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{A}} + T_y\cdot\frac{\alpha_2}{\sqrt{A}} + T_z\cdot\frac{\alpha_3}{\sqrt{A}} =$$

$$G^2\left\{\frac{A}{2\nu^2\sqrt{A}}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) - \frac{\lambda^2}{\nu^2}\frac{A}{\sqrt{A}}\left[\frac{1}{\nu}\left(\alpha_1\frac{\partial\nu}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\nu}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\nu}{\partial z}\right) - \triangle\right]\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\alpha_1}{\sqrt{A}} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\alpha_2}{\sqrt{A}} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\alpha_3}{\sqrt{A}}\right).$$

Nach der ersten der Gleichungen III_a ist $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$, nach Gleichung V_a ist

$$\triangle - \frac{1}{\nu}\left(\alpha_1\frac{\partial\nu}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\nu}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial\nu}{\partial z}\right) = 0$$

und der letzte Klammerausdruck wird gleich

$$\frac{\partial U}{\partial s_\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s_\varphi} = \frac{\partial U}{\partial\varphi}\sqrt{A},$$

mithin

$$W_\varphi = \Phi\sqrt{A} + \frac{\partial U}{\partial\varphi}A.$$

Nimmt man nun in Analogie mit dem geraden Rohr an, daß in Richtung der Netzlinien die Werte der Einzelpressungen gleich dem Mittelwerte, also

$$p_\varphi = p_\psi = p_\chi = p$$

sind, so wird hierdurch die Mittelwertsbedingung erfüllt und man erhält durch Subtraktion der Gleichungssysteme I und II

$$-\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{W_\varphi}{A}-\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\varphi}\frac{\nu}{A}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot r}{\sqrt{A}}\right)=0$$

$$\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{W_\psi}{A}+\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\psi}\cdot\frac{\nu}{A}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot\nu}{\sqrt{A}}\right)=0$$

und mit den Werten von W_φ und W_ψ

$$-\frac{\gamma}{g}\frac{\Phi}{\sqrt{A}}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}-\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\varphi}\cdot\frac{\nu}{A}+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot r}{\sqrt{A}}\right)=0$$

$$\frac{\gamma}{g}G^2\cdot\frac{A}{2}\cdot\frac{\partial\mu^2}{\partial\psi}\cdot\frac{r}{\nu\sqrt{A}}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial U}{\partial\psi}\cdot\frac{r}{\nu\sqrt{A}}+\left(\frac{\mathfrak{p}_\chi\nu}{\varrho_\psi\cdot A}\right)=0.$$

Es müssen nun Φ und U so gewählt werden, daß bei gegebenen Formfunktionen und gegebenen $\lambda=\mu\nu$ aus den Gleichungen $\mathfrak{p}_\chi$ eindeutig bestimmt werden kann.

Nun kann man aus den Gleichungen noch ϱ_ψ und ϱ_φ eliminieren, wenn man die Theorie der Krümmung orthogonaler Trajektorien berücksichtigt; ändert man die in den bezüglichen Ableitungen (Seite 64 u. f.) benützten Bezeichnungen wie folgt: $U=\varphi$, $V=\psi$, so werden die Linien der U-Schar zu ψ-Linien (Schnittlinien der φ-Flächen und der χ-Ebenen), diejenigen der V-Scharen zu φ-(Bahn-)Linien, und mit $\xi=x$, $\eta=r$

$$\varrho_\alpha=\varrho_\psi,\quad \varrho_\beta=\varrho_\varphi,\quad ds_\alpha=ds_\psi,\quad ds_\beta=ds_\varphi.$$

Aus den Gleichungen IV Seite 57 und a_1, a_2 Seite 64 folgt dann noch, daß der in letzteren vorkommende Faktor $\mu=\frac{r}{\nu}$ zu setzen ist; mit diesen Bezeichnungen ergeben sich aus den Gleichungen XV_a und XV_b:

$$\frac{1}{\varrho_\psi}=\frac{\nu}{r}\frac{d\frac{r}{\nu}}{ds_\varphi}-\frac{1}{\sqrt{A}}\cdot\frac{d\sqrt{A}}{ds_\varphi};\qquad \frac{1}{\varrho_\varphi}=+\frac{1}{\sqrt{A}}\cdot\frac{d\sqrt{A}}{ds_\psi}.$$

Es ist wohl zu beachten, daß entsprechend der Entwicklung der Ausdrücke für die Krümmungsmasse in den Quotienten $\frac{d}{ds_\varphi}$ und $\frac{d}{ds_\psi}$ die Differentiale sich auf die Elemente der Linien φ und ψ beziehen; es ist daher beim Übergang auf die Variablen darauf Rücksicht zu nehmen und zu schreiben:

$$\frac{1}{\varrho_\varphi}=-\frac{\nu\sqrt{A}}{r}\cdot\frac{\partial\frac{r}{\nu}}{\partial\varphi}-\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial\varphi}=-\frac{\nu\sqrt{A}}{r}\frac{\partial\frac{r}{\nu}}{\partial\varphi}-\frac{1}{2\sqrt{A}}\frac{\partial A}{\partial\varphi}$$

$$\frac{1}{\varrho_\varphi}=+\frac{r}{\nu}\frac{\partial\sqrt{A}}{\partial\psi}=+\frac{r}{2\nu\sqrt{A}}\frac{\partial A}{\partial\varphi}.$$

Diese Werte eingesetzt und die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{\sqrt{A}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}\cdot\frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{\sqrt{A}}$$

aufgelöst, gibt an Stelle der ersten Gleichung

$$-\frac{\mathfrak{p}_\chi r}{2A\sqrt{A}}\frac{\partial A}{\partial \psi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{2A\sqrt{A}}\frac{\partial A}{\partial \psi} + \frac{1}{\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial \mathfrak{p}_\chi r}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{g}\left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\frac{1}{\sqrt{A}}$$

und umgeformt durch Streichung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{1}{\sqrt{A}}$ und Additon der Identität:

$$\frac{A\,\partial\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{A}}{\partial \psi} + \frac{\mathfrak{p}_\chi r}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \psi} - \frac{\partial \mathfrak{p}_\chi \cdot r}{\partial \psi} = 0$$

$$A\cdot\frac{\partial\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{A}}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{g}\left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

An Stelle der zweiten Gleichung folgt:

$$-\frac{\mathfrak{p}_\chi \nu^2}{r\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial\frac{r}{\nu}}{\partial \varphi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{2A\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varphi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{2A\sqrt{A}}\frac{\partial A}{\partial \varphi} + \frac{\mathfrak{p}_\chi}{\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \frac{\nu}{\sqrt{A}}\frac{\partial \mathfrak{p}_\chi}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{\gamma}{g}\left(G^2\frac{A}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\frac{r}{\nu\sqrt{A}}$$

oder

$$-2\,\mathfrak{p}_\chi\cdot\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varphi} + \nu\frac{\partial \mathfrak{p}_\chi}{\partial \varphi} = \frac{\gamma}{g}\left(G^2\cdot\frac{A}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\frac{r}{\nu}$$

nach Addition der Identität

$$\frac{\nu}{r}A\frac{\partial\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{A}}{\partial \varphi} - \frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\mathfrak{p}_\chi \nu}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varphi} - \nu\frac{\partial \mathfrak{p}_\chi}{\partial \varphi} = 0$$

und Multiplikation mit $\frac{r}{\nu}$

$$A\frac{\partial\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{A}}{\partial \varphi} + 2\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot r}{A}\left(\frac{A}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} - \frac{A}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right) = \frac{\gamma}{g}\left(G^2\cdot\frac{A}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\frac{r^2}{\nu^2} \quad 2$$

Die Gleichungen 1 und 2 enthalten die Konstanten γ, g und G und sonst nur $\mathfrak{p}_\chi$, λ, U und Φ und Größen, die von den Formfunktionen abhängen,

da auch r durch $C=\frac{1}{r^2}$ resp. $\gamma_3=\frac{\partial\chi}{r\,\partial q}$ in die Entwicklungen eingetreten ist.

Bestimmt man aus 1: $\frac{\partial U}{\partial\varphi}$, aus 2: $\frac{\partial U}{\partial\psi}$ und bildet $\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)$, so entsteht eine Differentialgleichung für $\mathfrak{p}_\chi$, die nur mehr die Konstanten G, g und γ und Größen enthält, welche von Formfunktionen abhängen, da Φ nur eine Funktion von φ, also $\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}=0$ ist, d. h. der Ausdruck für $\mathfrak{p}_\chi$ wird von der Strömungsform abhängig, was begreiflich erscheint, da dieselbe jedenfalls einflußnehmend auf die Entwicklung der Turbulenz ist.

(Mit $\varphi=x$, $\psi=r^2$, $\chi=q$, $\nu=2$, $A=1$ gehen diese Gleichungen in diejenigen für das kreiszylindrische Rohr über und geben mit

$$\Phi=0;\quad U=\frac{g}{\gamma}k_0\varphi-\frac{G^2\lambda^2}{2}$$

die für dasselbe erhaltenen Resultate.)

Potentialformen.

Mit $\nabla^2\varphi=0$, $\nu=1$ folgen die speziellen Gleichungen

$$A\,\frac{\partial\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot r}{A}}{\partial\psi}=\frac{\gamma}{g}\left(\Phi+\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)\quad\ldots\quad 1_p$$

$$A\,\frac{\partial\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot r}{A}}{\partial\varphi}-2\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot r}{A}\left(\frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)=\frac{\gamma}{g}\left(G^2\cdot\frac{A}{2}\frac{d\lambda^2}{d\psi}+\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)r^2\quad\ldots\quad 2_p$$

Dividiert man beide Gleichungen 1_p und 2_p durch A und schreibt zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{p}_\chi\cdot r}{A}=\mathfrak{P};\quad \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\Phi}{A}+\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)=X$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial\varphi}=Y,\quad \frac{\gamma}{g}\left(\frac{G^2}{2}\frac{d\lambda^2}{d\psi}+\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\psi}\right)r^2=Z,$$

so nehmen dieselben die Form an

$$\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\varphi}=X;\quad \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\varphi}=\mathfrak{P}Y+Z$$

und geben durch wechselseitiges partielles Differentiieren

$$\frac{\partial X}{\partial\varphi}=\mathfrak{P}\frac{\partial Y}{\partial\psi}+\frac{\partial K}{\partial\psi}Y+\frac{\partial Z}{\partial\psi}=\mathfrak{P}\frac{\partial Y}{\partial\psi}+XY+\frac{\partial Z}{\partial\psi}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{\frac{\partial Y}{\partial \psi}} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} - XY - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right)$$

oder

$$\mathfrak{p}_\chi = \frac{A}{r \frac{\partial Y}{\partial \varphi}} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} - XY - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right) \quad \ldots\ldots\ldots 3$$

aus welcher Gleichung $\mathfrak{p}_\chi$ bei gegebenen Formfunktionen, λ, U und Φ bestimmt werden kann; λ, U, Φ, A und r sind in dieser Gleichung noch als Funktionen von φ und ψ eingeführt, und dieselben als Funktionen von x und r zu erhalten, hat man die partiellen Differentialquotienten zu transformieren.

Bedeutet F irgendeine Funktion von φ und ψ und damit auch von x und r, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial F}{\partial \psi} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \psi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots 4$$

mit den Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= +\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = +\frac{1}{rA} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= +\frac{1}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \frac{\partial r}{\partial \psi} = -\frac{1}{rA} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 5$$

Der Gebrauch der Formeln und deren Interpretation wird an einem speziellen Beispiel erörtert werden.

Strömungsformen mit $\nabla \varphi = K$.

Die Potentialformen sind Spezialfälle dieser allgemeinen Formen, charakterisiert durch $K = 0$.

Es wird mit $\nabla^2 \varphi = K$

$$\frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) = K$$

und ergibt sich hiermit aus den linksstehenden der Gleichungen 5, daß

$$\frac{A}{\nu} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} = \nabla^2 \varphi = K.$$

Der Klammerausdruck des zweiten Gliedes der Gleichung 2 wird $K - \frac{A}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi}$; man hat daher nur

$$Y = 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi}\frac{K}{A}\right)$$

zu setzen und diesen Ausdruck in der Gleichung 3 zu verwenden.

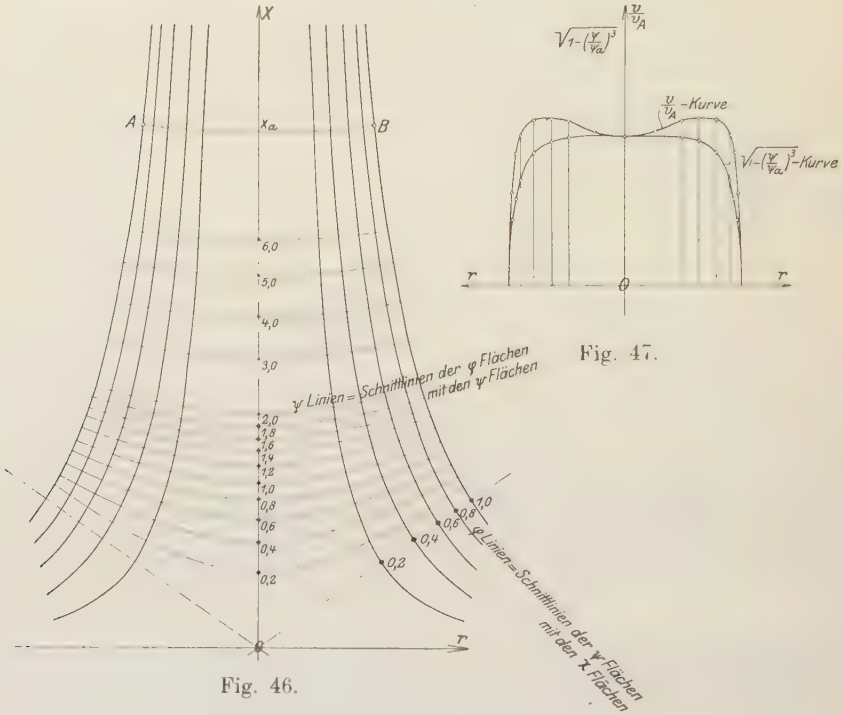

Fig. 46. Fig. 47.

Fig. 46. Stromnetz in einer Meridianebene.
Fig. 47. Diagramm der Verteilung von λ und der Geschwindigkeit im Querschnitt AB.

Es wird nun an einem Beispiel versucht werden, aus dem Ausdruck für $\mathfrak{p}_\chi$ Anhaltspunkte für die Wahl der Funktionen λ, U und Φ zu gewinnen und nach getroffener Wahl den Strömungsvorgang zu analysieren.

Beispiel.

Eine der einfachsten Potentialformen ist gegeben durch die Formfunktionen

$$\varphi = r^2 - 2x^2, \quad \psi = 2r^2 x, \quad \chi = q,$$

das Stromnetz in einer χ-Ebene ist in Fig. 46 dargestellt.

Es werden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -4x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2r, \quad A = 16x^2 + 4r^2$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -2, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2, \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Hieraus folgen die Transformationsformeln:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-4x}{A}; \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{1}{rA}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = +\frac{2}{A}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{+2r}{A}; \quad \frac{\partial r}{\partial \psi} = -\frac{1}{rA}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = +\frac{4x}{rA}.$$

Mit denselben erhält man:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\gamma}{g}\frac{1}{A^3}\left[A^2\left(\Phi' + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) + (128x^2 - 16r^2)\left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\right]$$

$$Y = \frac{4}{A}; \quad \frac{\partial Y}{\partial \psi} = -\frac{384x}{A^3}; \quad \frac{A}{r\,\partial Y / \partial \psi} = \frac{A^4 r}{192\psi}$$

$$XY = \frac{\gamma}{g}\left[\frac{4\Phi}{A^2} + \frac{4}{A^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{G^2}{2}\left[\frac{\delta^2(\lambda^2)}{\delta \psi^2}\cdot r^2 + \frac{\delta(\lambda^2)}{\delta \psi}\frac{8x}{A}\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\frac{r^2}{A^2} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\left(\frac{8x}{A} - \frac{48\psi}{A^3}\right)\right\}.$$

Für die Transformation des Wertes $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$ erhält man

$$\frac{\partial \frac{\Phi}{A}}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\frac{\delta \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\Phi}{A^2}\frac{\partial A}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\Phi' - \frac{\Phi}{A^2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= 32x \\ \frac{\partial A}{\partial r} &= 8r \end{aligned}\right\} \quad \frac{\delta \Phi}{\delta q} = \Phi'$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = -\frac{1}{A}(128x^2 - 16r^2)$$

hiermit:

$$\frac{\partial \frac{\Phi}{A}}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\Phi' + \frac{\Phi}{A^3}(128x^2 - 16r^2),$$

ferner:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{A^2}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial A}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{A^3}\frac{\partial U}{\partial \varphi}(128x^2 - 16r^2),$$

schließlich:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{\gamma}{g}\frac{1}{A^3}\left[A^2\left(\Phi' + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right) + (128x^2 - 16r^2)\left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\right]$$

$$Y = \frac{2}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

Die Wahl von U und Φ.

Wenn man die transformierten Werte für $\frac{\partial X}{\partial \varphi}$, X, Y, $\frac{\partial Z}{\partial \psi}$ und $-\frac{A}{r\frac{\partial Y}{\partial \psi}}$ in den Ausdruck für $\mathfrak{p}_\chi$ einführt, so kommt mit dem letzten Wert ψ in den Nenner und ist für die Wahl von U, Φ und λ bestimmend, daß ψ aus dem Nenner verschwinden muß, wenn sich die Fläche mit dem Funktionswert $\psi = 0$ im Stromgebiet befindet, da sonst in dieser Fläche $\mathfrak{p}_\chi$ unendlich groß würde; die Bedingung entfällt, wenn $\psi = 0$ nicht im Stromgebiet liegt; $\psi = 0$ wird bei der angenommenen Stromform gebildet aus der Koordinaten-Grundebene ($x = 0$) und der zur Achse zusammengeschrumpften Fläche mit $r = 0$.

---

gibt transformiert:

$$Y = +\frac{4}{A}$$

und folgt hieraus:

$$\frac{\partial Y}{\partial \psi} = \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial Y}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{128\,x}{A^2}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial r} = -\frac{32\,r}{A^2},$$

hiermit

$$\frac{\partial Y}{\partial \psi} = -\frac{384\,x}{A^3} \qquad \text{und} \qquad \frac{A}{r\frac{\partial Y}{\partial \psi}} = -\frac{A^4}{384\,x\,r} = -\frac{A^4\,r}{192\,\psi}.$$

Für die Transformation von $\frac{\partial Z}{\partial \psi}$ erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \lambda^2}{\partial \psi}r^2\right) = \frac{\partial^2(\lambda^2)}{\partial \psi^2}r^2 + \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \psi}\cdot 2\,r\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi}$$

$$= \frac{\partial^2(\lambda^2)}{\partial \psi^2}r^2 + \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \psi}\cdot\frac{8\,x}{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\cdot\frac{r^2}{A}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\cdot\frac{r^2}{A}\cdot\frac{\partial U}{\partial \psi}\,2\,r\frac{\partial r}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{r^2}{A^2}\cdot\frac{\partial A}{\partial \psi}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} &= 32\,x\\ \frac{\partial A}{\partial r} &= 8\,r\end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial A}{\partial \psi} = \frac{96\,x}{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\cdot\frac{r^2}{A}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\cdot\frac{r^2}{A^2} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{8\,x}{A} - \frac{\partial U}{\partial \psi}\cdot\frac{48\,\psi}{A^3}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{g}\left\{\frac{G^2}{2}\left[\frac{\partial^2(\lambda^2)}{\partial \psi^2}\cdot r^2 + \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial \psi}\cdot\frac{8\,x}{A}\right] + \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\cdot\frac{r^2}{A^2} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{8\,x}{A} - \frac{\partial U}{\partial \psi}\cdot\frac{48\,\psi}{A^3}\right\}.$$

Da im Ausdruck von $\frac{\partial Z}{\partial \psi}$ der erste und der zweite Differentialquotient von U nach ψ vorkommt, so wird die Bedingung unter anderem erfüllt mit $\Phi = 0$ und allgemein

$$U = K_1 \Phi_1 \psi^3 + K_2 \Phi_2 \psi^4 + \ldots .$$

worin Φ_1, $\Phi_2 \ldots$ Funktionen von φ und K_1, $K_2 \ldots$ Konstante sind, die auch die physikalischen Konstanten enthalten, deren Werte daher experimentell zu bestimmen sein werden.

Nimmt man vorläufig den einfachsten Wert $U = K \varphi \psi^3$, so folgt:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{A^3} [K(128\, x^2 - 16\, r^2)\, \psi^3]$$

$$X\, Y = \frac{\gamma}{g} \frac{1}{A^3} (4\, K\, A\, \psi^3)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{1}{A^3} \left\{ [6\, r^2\, A\, \varphi\, \psi + 24\, x\, A^2\, \varphi\, \psi^2 - 144\, \varphi\, \psi^3]\, K \right.$$

$$\left. + \frac{G^2}{2} \left[\frac{d^2(\lambda^2)}{d\psi^2} \cdot r^2 A^3 + \frac{d(\lambda^2)}{d\psi} 8\, x\, A^2 \right] \right\}.$$

Die Wahl von λ.

Für die Wahl von λ ist außerdem noch die Bedingung maßgebend, daß bei Annahme des Haftens an den Begrenzungswänden der Funktionswert von λ an diesen Flächen gleich Null werden muß.

Es sind diesbezüglich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. Bestand nur einer Wandfläche zwischen 2 Querschnittsflächen mit den Funktionswerten ψ_I und ψ_{II} die gleiche Vorzeichen besitzen, Fig. 48a.

2. Bestand von zwei Wandflächen mit Funktionswerten ψ_a und ψ_b mit gleichem Vorzeichen, Fig. 48b.

3. Bestand von zwei Wandflächen mit Funktionswerten ψ_a und ψ_b von verschiedenem Vorzeichen, speziell z. B. ψ_a und $-\psi_a$, Fig. 48c.

4. Bestand einer Wandfläche ψ_a und einer Diskontinuitätsfläche ψ_b; hierbei wird sich die Frage ergeben, ob eine solche Fläche eine freie Oberfläche sein kann; ein Grenzfall ist hierbei $\psi_b = 0$, also die Koordinaten-Grundebene als Diskontinuitätsfläche.

Die Bedingung des Verschwindens von ψ aus dem Nenner ist zu erfüllen in den Fällen 1, 3 und 4 im Grenzfall $\psi_b = 0$.

Die Bedingung $\lambda = 0$ an ψ_a und ψ_b kann passend erfüllt werden mit

$$\lambda^2 = (\varphi_a{}^n - \psi^n) - \frac{\psi_a{}^n - \psi^n}{\psi_a{}^m - \psi_a{}^m}(\psi_a{}^m - \psi^m),$$

worin die Exponenten n und m entsprechend zu bestimmen sind; wenn nur eine Begrenzungsfläche vorhanden ist, so wird mit $m = n$ die Bedingung des Haftens erfüllt, es ist dann $\lambda^2 = \psi_a{}^n - \psi^n$, dies entspricht dem Fall 1. Ist hierbei n eine gerade Zahl, so wird die Bedingung des Haftens auch für den Fall $\psi_a = +\psi_a$, $\psi_b = -\psi_b$ entsprechend dem Fall 3 erfüllt.

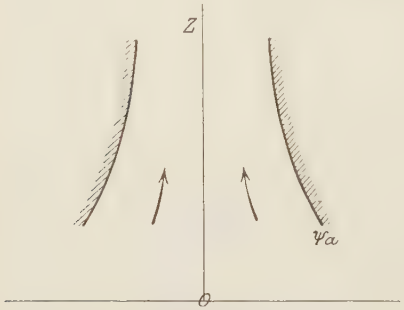

Fig. 48a.

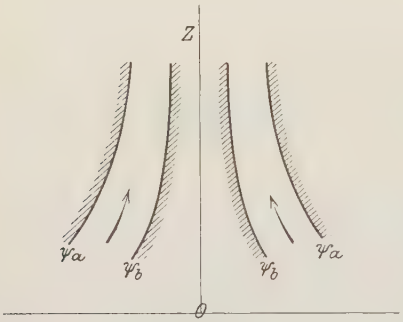

Fig. 48b.

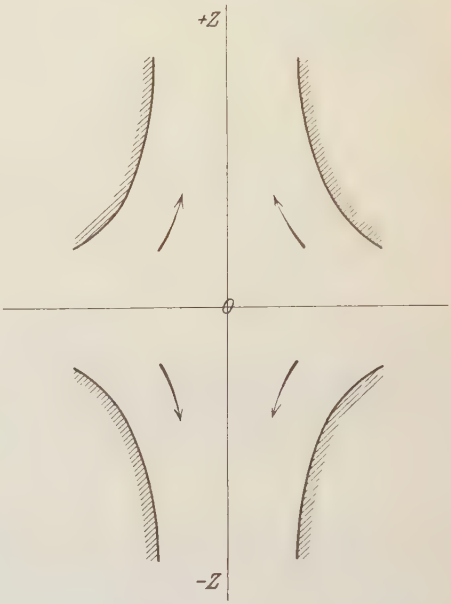

Fig. 48c.

Im Falle 4 ist nur Haften an einer Wandfläche nötig, da in der Diskontinuitätsfläche Bewegung vorausgesetzt wird, es genügt also ebenfalls die Form $\lambda^2 = \psi_a{}^n - \psi^n$.

Nur für den Fall 2 ist die allgemeine Gleichung zu berücksichtigen.

Die Bedingung des Verschwindens von ψ aus dem Nenner des Ausdrucks für $\mathfrak{p}_\chi$ wird erfüllt mit $n \gtrless 3$, denn es werden hierbei

$$\frac{d\lambda^2}{d\psi} = -n\psi^{n-1}; \qquad \frac{d^2(\lambda^2)}{d\psi^2} = -n(n-1)\psi^{n-2},$$

dies gibt mit $n = 3$ als kleinstem Wert und $\lambda^2 = \psi'_a{}^3 - \psi^3$, also für die Fälle 1 und 4

$$\left[\frac{d^2(\lambda^2)}{d\psi^2} r^2 A^3 + \frac{d(\lambda^2)}{d\psi} 8 x A^2\right] = -(6 r^2 A^3 \psi + 24 x A^2 \psi^2).$$

Für den Fall 3 ist $n = 4$ zu setzen, da mit $n = 2$ der Wert von $\frac{d^2(\lambda^2)}{d\psi^2} = 2$, also ψ nicht mehr als Faktor enthalten würde, man erhält

$$\left[\frac{d^2(\lambda^2)}{d\psi^2} r^2 A^3 + \frac{d(\lambda^2)}{d\psi} 8 x A^2\right] = -(12 r^2 A^3 \psi^2 + 32 x A^2 \psi^3).$$

Für den Fall 2 können n und m beliebige, nur nicht gleiche Werte annehmen, mit $n = 1$ und $m = 2$ folgt

$$\lambda^2 = (\psi_a - \psi) - \frac{(\psi_a - \psi_b)}{(\psi'_a{}^2 - \psi'_b{}^2)} (\psi_a{}^2 - \psi^2).$$

Übrigens könnte hierbei auch in Analogie mit dem geraden Rohr

$$\lambda^2 = \psi_a - \psi - \frac{(\psi'_a - \psi'_b)}{\lg(\psi'_a - \psi'_b)} \lg(\psi_a - \psi)$$

gesetzt oder eventuell statt des Logarithmus eine andere Funktion genommen werden.

Durch die Mannigfaltigkeit der Funktionsformen für λ^2, mit denen beiden Bedingungen entsprochen werden kann, ist die Anpassung der formellen Resultate an Versuchsresultate und hierdurch auch die Verwendbarkeit der entwickelten Darstellungsmethode für die Diskussion zur Bestimmung der Oberflächenkräfte ermöglicht.

Es wird im folgenden die Untersuchung mit der Annahme:

$$\lambda^2 = \psi_a{}^3 - \psi^3, \quad \text{d. h. } n = 3$$

weiter verfolgt.

Bestimmung der Konstanten K und G.

Wird der angenommene Wert für U in die Gleichung XXIII_m* eingesetzt, so erhält man mit $\Phi = 0$

$$\frac{g}{\gamma} p + G^2 A \frac{\lambda^2}{2} + K \varphi \psi^3 = \text{konst.}$$

oder

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{K}{g} \varphi \psi^3 = \text{konst.}$$

Die beiden ersten Glieder stellen die Strömungsenergie per Gewichtseinheit strömender Flüssigkeit dar; differentiiert man nach φ, so erhält man mit der Bezeichnung:

$$E = \left(\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = -\frac{K}{g}\psi^3 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial E}{\partial s_\varphi} = -\frac{K}{g}\sqrt{A}\,\psi^3.$$

Die Einführung von U als eine Potentialfunktion entspricht einer Anschauung von Herrn Professor R. v. Mises, die derselbe in seiner Arbeit „Theorie der Wasserräder", Verlag von Teubner, Leipzig, auf Seite 62 zum Ausdruck gebracht hat: „Die stabilen Mittelwerte der Geschwindigkeit lassen sich angenähert als Integrale der Helmholtzschen Gleichungen darstellen, sobald man eine geeignete in jedem Fall besonders festzusetzende Annahme über den Verlauf der Funktion H (d. i. obige Funktion) und der Verteilungsziffern trifft."

Die beiden zuletzt erhaltenen Gleichungen sind wie folgt zu interpretieren:

1. Die erste Gleichung, in der Form $\triangle E = -\frac{K}{g}\psi^3 \triangle\varphi$:

Der Energieabfall der Gewichtseinheit strömender Flüssigkeit zwischen zwei benachbarten Querschnittsflächen ist in jedem Punkte proportional der dritten Potenz des Funktionswertes der Stromfläche, auf der der Punkt sich bewegt, und der benachbarten Querflächen.

2. Die zweite Gleichung, in der Form $\frac{\triangle E}{\triangle s_\varphi} = -\frac{K}{g}\sqrt{A}\,\psi^3$:

Der Energieabfall der Gewichtseinheit strömender Flüssigkeit pro Längeneinheit der Bahn ist in jedem Punkte proportional dem diesem Punkte durch die Strömung zukommenden Wert $\sqrt{A}$ und der dritten Potenz des Funktionswertes der ψ-Fläche, auf der sich der Punkt bewegt.

Ändert man diese Gleichung noch insofern, daß man

$$\frac{\nabla E}{\triangle s_\varphi} = -\left(\frac{K}{gG}\right) G\sqrt{A}\,\psi^3 = -\left(\frac{K}{gG}\right)\mathfrak{v}\,\psi^3$$

schreibt, so bedeutet $\mathfrak{v} = G\sqrt{A}$ die Geschwindigkeit, die dem Punkt bei $\lambda = 1$ also bei einer vollkommenen Potentialströmung mit derselben Geschwindigkeitskonstanten G zukommen würde, mit der die wirkliche Strömung erfolgt; man kann daher auch sagen:

3. Der Energieabfall pro Längeneinheit ist in jedem Punkt proportional der Geschwindigkeit, die demselben in der Potentialströmung zukommt und der dritten Potenz des Funktionswertes der Stromfläche, auf der er sich bewegt.

Da nach der Geschwindigkeitsformel am Rande $v = 0$ ist, so wird dort: $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial \varphi}$; mit der Bezeichnung p_r für Randpressungen und die Zuordnung

$$\varphi_I \cdots p_{rI}; \qquad \varphi_{II} \cdots p_{rII}$$

$$\frac{p_{rI} - p_{rII}}{\varphi_{II} - \varphi_I} = \frac{\gamma}{g} K \psi_a^{\,3} = \text{konst.} \quad \ldots\ldots\ldots \text{a}$$

Diese Formel gibt die Grundlage, den Koeffizienten K mittels Pressungsmessung am Rand also durch den Versuch zu bestimmen.

An der Achse ist $\frac{\partial E}{\partial \varphi} = 0$; da $\psi = 0$ ist. Dieses Verschwinden des Energieabfalles an der Achse entspricht der Anschauung, wonach bei stationärer Bewegung der Einfluß der Randwiderstände gegen die Achse zu abnimmt[1]); es wird in der Achse:

$$\frac{\gamma}{g}(p_{IIa} - p_{Ia}) + \frac{1}{2}(v_{IIa}^2 - v_{Ia}^2) = 0$$

oder da die Gleichung $v^2 = G^2 A \lambda^2 = G^2 A (\psi_a^{\,3} - \psi^3)$ an der Achse $v_a^{\,2} = G^2 A_a \psi_a^{\,3}$ gibt, folgt mit der Zuordnung: $p_{aI} \cdots A_{aI}$; $p_{aII} \cdots A_{aII}$

$$(p_{aI} - p_{aII}) = \frac{\gamma}{g}\frac{G^2}{2}(A_{aII} - A_{aI})\psi_a^{\,3},$$

womit durch

$$G = \sqrt{\frac{2(p_{Ia} - p_{IIa})}{A_{aII} - A_{aI}} \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot \frac{1}{\psi_a^{\,3}}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{b}$$

eine Formel zur experimentellen Bestimmung von G und zwar mittels Pressungsmessung an der Achse gegeben ist.

Setzt man den Wert von G in die Formel für v ein, so folgt

$$v = \sqrt{\frac{2g}{\gamma}\frac{p_{Ia} - p_{IIa}}{A_{aII} - A_{aI}}}\sqrt{1 - \left(\frac{\psi}{\psi_a}\right)^3} \quad \ldots\ldots\ldots \text{c}$$

als Geschwindigkeitsformel, die dem Wesen nach der Poiseuilleschen Formel entspricht und ergibt sich schließlich für die Durchflußmenge in der Zeiteinheit die Formel:

---

[1]) Ob dies in dem durch die getroffene Wahl für U sich ergebenden Maße der Fall ist, ist erst durch den Versuch zu bestätigen.

$$Q = \int v \, d s_\varphi = G \int_0^{2\pi'} d\chi \int_0^{\psi_a} \lambda \, d\psi = 2\pi G \int \sqrt{\psi_a^3 - \psi^3} \, d\psi$$

$$= 2\pi G \varepsilon \psi_a^{\frac{5}{2}} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \ldots$$

$$Q = 2\pi\varepsilon \sqrt{\frac{g \cdot 2}{\gamma} \frac{p_{Ia} - p_{IIa}}{A_{aI} - A_{aII}}} \psi_a^{5/2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{d}$$

Die ermittelte Theorie liefert dementsprechend Formeln, die in ähnlicher Weise wie diejenigen von Poiseuille als Grundlage für Versuche genommen werden können und an denen einerseits die Theorie selbst geprüft, andererseits die Grenzen der Anwendbarkeit derselben auch auf andere Formen bestimmt werden können.

Es können dienen

die Formel a zur Bestimmung der Konstanten K,
„ „ b „ „ „ „ „ G,
„ „ c „ Kontrolle.

Die Methoden der Versuche selbst müssen allerdings zum Teil erst ausgebildet werden; für die wichtigsten Messungen, das sind die Pressungsmessungen am Rand und an der Achse, liegen technische Hilfsmittel bereits vor. Es wird naturgemäß bei allen solchen Versuchen der durch den geodätischen Höhenunterschied bedingte Pressungsunterschied zu berücksichtigen sein.

Es wird auch nötig werden, die Strömungsform selbst zu prüfen; wie weit die bestehenden Methoden zur Bestimmung von Größe und Richtung der Geschwindigkeit zureichend sind, muß die Erfahrung lehren: jedenfalls muß dahin gestrebt werden, möglichst sichere Anhaltspunkte über die Geschwindigkeitsverteilung zu erhalten, also die Isotachen durch den Versuch zu bestimmen, da die Formel

$$\lambda = \sqrt{\psi_a^3 - \psi^3}$$

nach den Erörterungen auf Seite 199 doch nur als eine erste für die Durchführung der Rechnung bequeme Annahme zu betrachten ist; dasselbe gilt bezüglich U, wobei noch zu bemerken ist, daß Bewegungshindernisse solcher Art, wie z. B. durch Nietnähte, ebenso in U zum Ausdruck kommen müssen wie beim geraden Rohr.

Grenzbestimmungen.

Zur Bestimmung der Grenzen, innerhalb welcher die angenommene Strömungsform bei der durch die Funktionen λ und U beschriebenen Geschwindigkeits- und Pressungsverteilung überhaupt möglich ist, können die mit dem Schwerkraftsglied vervollständigte Niveauflächen-

gleichung und die Gleichung für $\mathfrak{p}_\chi$ herangezogen und mit Hilfe derselben untersucht werden, ob innerhalb des Stromgebietes einerseits der Wert der absoluten Pressung, andererseits der Wert von $\mathfrak{p}_\chi$ an irgendeiner Stelle der Wand das Vorzeichen wechselt; in beiden Fällen begrenzen diese Stellen das Strömungsgebiet, innerhalb dessen die angenommene Form möglich ist in dem Sinne, daß dies nur dort der Fall ist, wo $p > 0$ und das Vorzeichen von $\mathfrak{p}_\chi$ einer der Strömungsgeschwindigkeit entgegengesetzten Richtung entspricht, da $\mathfrak{p}_\chi$ die dem Wandwiderstand entsprechende Spannung ist.

Bei Bestimmung des Ortes des Zeichenwechsels von p wird natürlich die Schwerkraftswirkung und diejenige Stromfläche zu berücksichtigen sein, an der an sich die kleinste Pressung eintreten kann; bei lotrechter Lage der Achse ist, wenn mit p_0 der Betrag der absoluten Pressung im Koordinatenursprung und mit h die geodätische Höhe eines Punktes über der Koordinaten-Grundebene bezeichnet wird, die vollständige Gleichung der Niveauflächen

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{v^2}{2g} + \frac{K}{g}\varphi\psi^3 = \frac{p_0}{\gamma}$$

mit p als Parameter.

Es wird somit für die angenommene Strömungsform

$$\frac{p_0}{\gamma} - h - \frac{G^2 A \lambda^2}{2g} - \frac{K}{g}\varphi\cdot\psi^3 = 0$$

die Gleichung der Niveaufläche für den Pressungswert $p = 0$ und als solche auch der gesuchten Grenzfläche.

Mit $\lambda^2 = \psi_a{}^3 - \psi^3$ und $U = K\varphi\psi^3$ wird nach den früheren Bestimmungen

$$\mathfrak{p}_\chi = + \frac{Ar}{192}\left\{\left[6r^2A\varphi + 24xA^2\varphi\psi - (144\varphi - 2A + 128x^2 - 16r^2)q^2\right]K - \frac{G^2}{2}(6r^2A^3 + 24xA^2\psi)\right\}\frac{\gamma}{g}.$$

Setzt man in dieser Formel die Koordinatenausdrücke für φ, A und ψ ein, so entspricht dieselbe mit $\mathfrak{p}_\chi$ als Parameter einer Flächenschar (Rotationsflächen); die Parallelkreise, in denen die Flächen $\mathfrak{p}_\chi = 0$ die Wandfläche ψ_a schneiden oder berühren, sind diejenigen Orte, an denen Zeichenwechsel von $\mathfrak{p}_\chi$ stattfindet und die daher Grenzorte des Gebietes sind, für das die Theorie verwendbar ist, d. h. innerhalb deren eine Strömung der angenommenen Form und Geschwindigkeitsverteilung möglich ist.

Man kann sich über die Lage dieser Parallelkreise ohne direkte Bestimmung der Koordinaten der Parallelkreise durch folgende Betrachtungen orientieren:

Mit Einführung der Bezeichnungen

$$M = (6r^2 A + 24 x A^2 \psi)$$
$$N = (144\varphi + 2A + 128x^2 - 16r) = (120r^2 - 128x^2)$$
$$Q = 6r^2 A^3 + 24 x A^2 \psi$$

nimmt die Gleichung für $\mathfrak{p}_\chi$ die Form an

$$\mathfrak{p}_\chi = \frac{A r}{192} \frac{\gamma}{g} \left[(M\varphi - N\psi^2) K - \frac{G^2}{2} (Q) \right].$$

Das Strömungsgebiet liege nur auf der Seite der positiven X-Achse; der Funktionswert von φ wird Null, wenn

$$\varphi = r^2 - 2x^2 = 0$$

ist, d. h. die Kegelfläche, deren Erzeugenden durch die Gleichung $r = \sqrt{2} \cdot x$ bestimmt sind, ist die Querschnittsfläche mit dem Funktionswert Null; im Gebiet zwischen der X-Achse und dieser Fläche wird φ an allen Stellen negativ; im Gebiet zwischen dieser Kegelfläche und der Koordinatengrundebene wird φ an allen Stellen positiv.

$N = 120 r^2 - 128 x^2$ stellt ein Flächensystem dar, in welchem die Kegelfläche mit den Erzeugenden $r = \sqrt{\frac{6}{5}}\, x$ ebenfalls den Funktionswert Null besitzt; im Gebiet zwischen Achse und Kegelfläche ist N stets negativ, im Gebiet zwischen Kegelfläche und Grundebene stets positiv.

$\psi = 2r^2 x$ ist auf der Seite der positiven X-Achse überall positiv, daher sind auch M und Q im ganzen Gebiet überall positiv.

Für r ist nur der positive Wert anzunehmen, da gemäß der verwendeten Darstellungsweise die χ-Ebene durch die Achse begrenzt ist. Dementsprechend wird $\mathfrak{p}_\chi$ stets dann negativ, wenn entweder $(M\varphi - N\psi^2) K$ negativ oder wenn $(M\varphi - N\psi^2) K \frac{G^2}{2} < Q$ ist.

Diese Erwägungen führen zu nachstehenden Folgerungen:

Es sei bezeichnet der Schnittpunkt der Meridianlinie der Wandfläche (ψ_a) mit derjenigen der $N = 0$-Fläche durch a mit derjenigen der $\varphi = 0$-Fläche durch b von a ab die Richtung längs der Wand-Meridianlinie außerhalb durch ab, von b ab außerhalb ab durch bd.

Längs der Strecke ab der Meridianlinie der ψ_a-Fläche kann der totale Klammerausdruck von $\mathfrak{p}_\chi$ nur negative Werte annehmen, da K positiv.

In der Richtung ac bleibt M negativ ($N\psi^2$) wird positiv, es wechselt der Wert des Faktors von K das Vorzeichen an derjenigen Stelle, an der $M\varphi = N\psi^2$ wird; es kann daher von dieser Stelle ab in der Richtung c einen Punkt an der Meridianlinie geben, an dem der totale Klammerausdruck gleich Null wird, d. h. wo $\mathfrak{p}_\chi$ das Vorzeichen wechselt.

In der Richtung bd wird $M\varphi$ positiv, $N\psi^2$ bleibt positiv; es wechselt der Wert des Faktors von K das Vorzeichen ebenfalls bei $M\varphi = N\psi^2$ und kann daher von dieser Stelle ab in der Richtung c in einem zweiten Punkt der Meridianlinie Zeichenwechsel von $\mathfrak{p}_\chi$ eintreten.

Die Lage der beiden Punkte des Zeichenwechsels von $\mathfrak{p}_\chi$ ist bei gegebener ψ_a-Fläche abhängig von K und $\frac{G^2}{2}$ und

sofern K einen für das bestehende Rohr bestimmten konstanten Wert hat, abhängig von G^2, d. h. von der Größe des Geschwindigkeitskoeffizienten und hiermit von der Strömungsgeschwindigkeit.

Dies führt zu dem durch die Erfahrung bestätigten Resultat, daß die Stabilität einer Strömungsform von den Geschwindigkeitsgrenzen abhängt in dem Sinn, daß bei Überschreiten einer bestimmten Geschwindigkeit die Strömungsform in einem solchen Rohr sich verändert resp. diskontinuierliche Strömung eintritt, daß aber auch innerhalb eines solchen Rohres eine vorhandene Diskontinuität wieder aufgehoben und eine geordnete, an die Rohrwand anschließende Strömung eintreten kann, wenn sich das entsprechende Verhältnis $K : \frac{G^2}{2}$ einstellt; die durch Fig. 2 dargestellten und die von Hampel gefundenen Diskontinuitätserscheinungen finden in solcher Weise eine Begründung.

Die theoretischen Entwicklungen können an Hand der Formeln 3_a auch auf Strömungsformen ausgedehnt werden, für die $\nabla q = \text{konst.}$ wird, die mathematischen und physikalischen Überlegungen gehen parallel mit den für die Potentialformen verwendeten.

Ebenso wie beim geraden Rohr durch Benützung der Hilfsgleichung $\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} = \text{konst.}$ durch graphische Addition aus Potentialströmungsformen andere Strömungsformen entstanden, die eine Anpassung an praktische Profile ermöglichten, so werden auch im vorliegenden Fall graphische Additionen von Potentialformen mit den Grundformen der Gleichung $\nabla \varphi = \text{konst.}$ zu Formen der praktischen Verwendung führen.

Das auf Seite 225 angeführte partikuläre Integral zeigt mit $\varphi_1 = ax^2 + br^2 + cx + d$, daß diese Grundformen Rotationsflächen zweiten Grades sind.

Strömungen der zweiten Art.

Die Strömungsformen entsprechen den allgemeinen Gleichungen V_{ra} und kann hierbei ν eine beliebige Funktion von r und x sein; für solche Strömungen ist $\frac{W_s}{VA}$ nicht mehr als Funktion von φ anzunehmen, sondern aus den Differentialgleichungen XXVII, Seite 133 zu bestimmen, wobei $D = 0$ wird, wenn U als Potentialfunktion eingesetzt, für deren Wahl jedoch wieder Überlegungen ähnlicher Art wie bei Potentialformen führend sein werden.

Die bisherigen Ergebnisse können in folgender Weise zusammengefaßt werden:

a) Es gibt zwei Arten von Strömungsformen und zwar
1. Formen, bei denen widerstandsfreie Bewegung möglich wäre,
2. Formen, bei denen dies nicht der Fall ist.

b) Die Formen der ersten Art sind entweder Potentialformen oder solche Formen, die durch Funktionsaddition von Potentialformen mit Formen entstehen, deren Querschnittsfunktion der Gleichung $\nabla^2 q = \text{konst.}$ entsteht, wobei die Konstante einen von Null verschiedenen Wert hat.

c) Unter dem Einfluß der Widerstände werden solche widerstandsfreie Strömungsformen in Schichtströmungen verwandelt, bei denen die Geschwindigkeitsverteilung durch eine Funktion λ bestimmt wird, mit derjenigen Formfunktion als Argument, deren Flächenschar die Wandfläche enthält.

d) Durch Einführung von Funktionen U und Φ kann die mathematische Bedingung der Gleichung XXIII, wonach alle Glieder derselben totale Differentiale sein müssen, erfüllt und gleichzeitig Randbedingungen entsprochen werden, die mit Form und Art der durch die Beschaffenheit der Wände verursachten Widerstände zusammenhängen; die Wahl dieser Funktionen unterliegt der Bedingung, daß die durch dieselben als Massenkräfte eingeführten Widerstände in Oberflächenkräfte übergeführt werden können, die mit den physikalischen Eigenschaften solcher Kräfte vereinbar sind.

e) Durch die Bestimmung der Verteilung dieser Oberflächenkräfte ist die Möglichkeit gegeben, für jede Form das Gebiet abzugrenzen, innerhalb dem dieselbe bestandsfähig ist.

f) Die Strömungsformen, die Geschwindigkeits-, Pressungs- und Energieverteilung sind mit den angegebenen geometrischen Hilfsmitteln darstellbar.

g) Die Theorie ist durch experimentelle Bestimmung der Formfunktionen, der Isotachen und der Niveauflächen kontrollierbar und kann eine Grundlage geben für die Bestimmung der noch in den Gleichungen vorkommenden physikalischen Konstanten.

h) Die Strömungsformen der zweiten Art sind nur unter Entwicklung von Turbulenz möglich. Dieselben erscheinen daher, sofern dieselben überhaupt mathematisch verfolgbar sind, geeignet, diejenigen Strömungserscheinungen zu beschreiben, die beim unstetigen Übergang von einer Strömungsform in die andere stattfinden.

i) Hierdurch erscheint es möglich, die Strömung durch einen Komplex von Kanälen in einzelne individuelle Teile aufzulösen, wodurch das Problem der Bestimmung einer einheitlichen Strömungs-

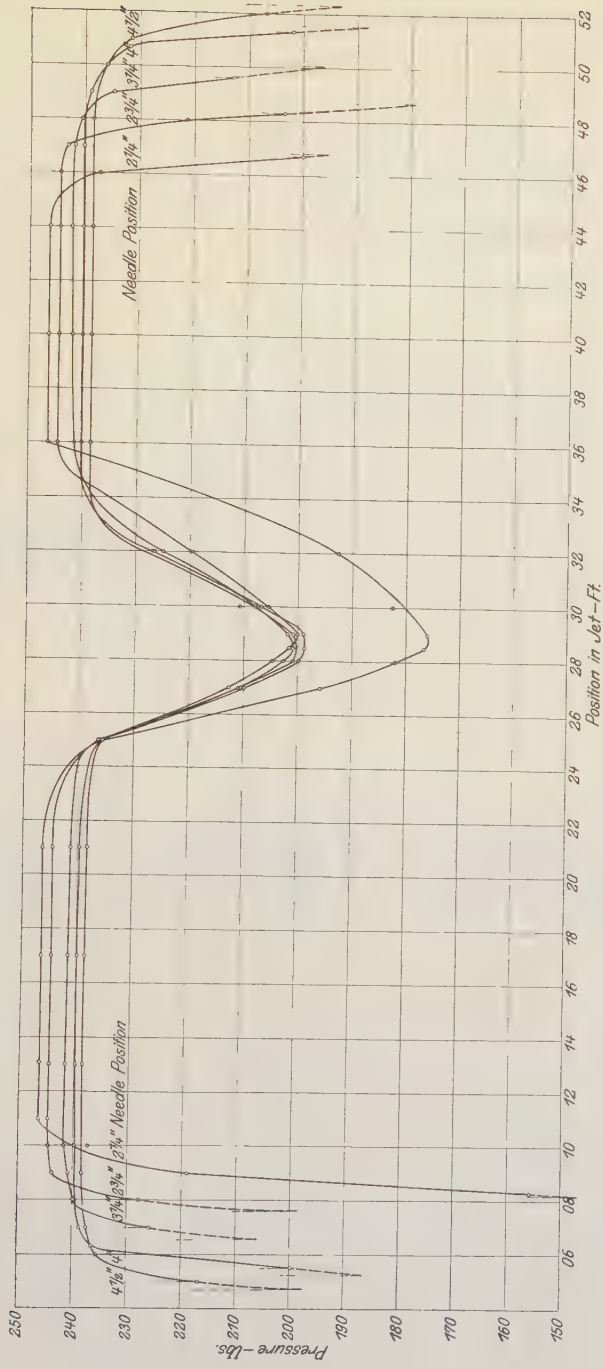
Needle Position
2¼"
2¾"
3¼"
4 3/8"
4⅞"
3¾"
2¾"
Needle Position
Pressure – lbs.
Position in Jet – Ft.

Fig. 49.

form für das ganze Kanalsystem entfällt, an dessen Schwierigkeit die Anwendung der Ergebnisse der Hydrodynamik bisher gescheitert ist.

In Fig. 47 ist für eine Düse mit der durch $\psi = r^2 z$ bestimmten Profilform die Geschwindigkeitsverteilung, entsprechend der auf theoretischem Wege abgeleiteten Funktion $\lambda = \sqrt{\psi_x^{\,3} - \psi^3}$ dargestellt.

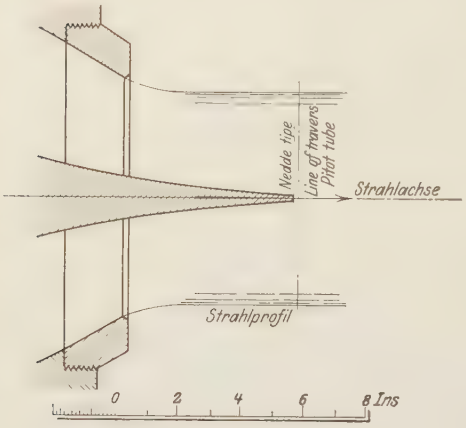

Fig. 50.

Man erkennt den Bestand zweier Stellen für Geschwindigkeitsmaxima, wie solche auch bei den die Versuchsergebnisse an geraden Rohren darstellenden Fig. 38 und 39 zu finden sind.

Fig. 49 wurde mir von Herrn Arnold Pfau, Resident consulting Engineer in Hydraulic Department von Allis Chalmers & Co. in Milwaukee U. S. A. zur

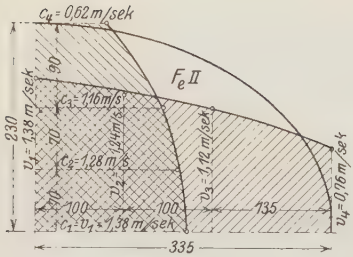

Fig. 51.

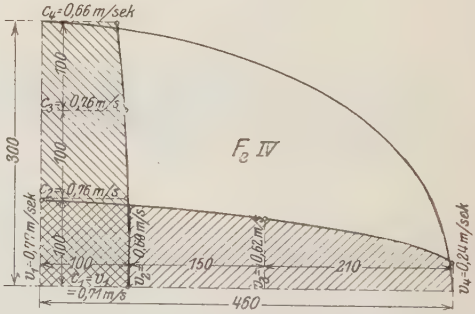

Fig. 53.

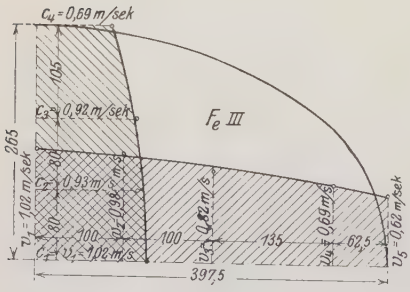

Fig. 52.

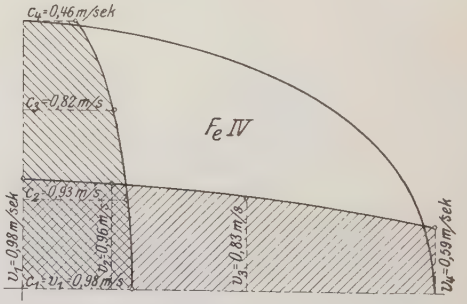

Fig. 54.

Verfügung gestellt; die Figur gibt die mittels Pitot-Rohren gemessene Geschwindigkeitsverteilung im freien Strahl hinter einer Nadeldüse; über diese Versuche hat Herr Prof. William Rankine Eckart, S. Francisco, am Meeting der Institution of Mechanical Engineers in London, 7. Jan. 1910, ausführlich berichtet („Engineer", Jahrgang 1910); man erkennt deutlich den Einfluß der Widerstände an der Nadel und eine noch von den Randwiderständen herrührende Verminderung der Geschwindigkeit gegen den Rand.

Fig. 50 zeigt die Meßstelle hinter der Nadel.

Die Fig. 51, 52, 53, 54 zeigen die ebenfalls mittels Pitot-Rohren bestimmte Geschwindigkeitsverteilung an den Austrittsquerschnitten elliptischer Saugrohre; dieselben sind der Dissertationsarbeit von Herrn dipl. Masch.-Ing. Dr. Dübi: „Über die Wirkungsweise des Gefällevermehrers nach Clemens Herschel", Verlag von Rascher & Co., Zürich und Leipzig, entnommen; diese Arbeit enthält auch eine Reihe instruktiver Messungsresultate über die Pressungen am Rand und in der Achse der Saugrohre.

Hiermit scheint die Grundlage gegeben zu sein für die Verfolgung der Strömungserscheinungen in Düsen und Saugrohren.

Die weitere Verarbeitung der gewonnenen Grundsätze muß jedoch Spezialarbeiten vorbehalten bleiben.

4. Ebene zweidimensionale Schichtströmungen.

Als Formfunktionen sind $\chi = z$ unf für φ und ψ jene Funktionen zu nehmen, die den Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \triangle = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= + \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial y}\right) \\ \triangle^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= - \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \nu}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \mathrm{V}_{ea}$$

entsprechen; dieselben entstehen aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\nu$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\nu,$$

wie sich durch wechselseitiges partielles Differentiieren und Beachtung der Gleichungen IV ergibt.

Mit $\nu = \text{konst.}$ geben die Gleichungen Potentialformen; ist ν eine Funktion derselben Koordinaten, so geben die Gleichungen V_{ea} Formen, bei denen widerstandsfreie Bewegung möglich ist, wenn die Funktionen φ und ν auch die erste der Gleichungen XXIV (Seite 128) mit $\mu = \frac{1}{\nu}$ und $W_x = W_y = W_z = 0$, d. h. die Gleichung

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y}\cdot\alpha_1 - \frac{\partial \Delta}{\partial x}\,\alpha_2 = \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial y} - 2\,\Delta\cdot\alpha_2\right)\frac{\partial \nu}{\partial x} - \left(\frac{\partial A}{\partial x} - 2\,\Delta\cdot\alpha_2\right)\frac{\partial \nu}{\partial y}\right]$$

erfüllen, wie z. B. die Funktionen $\varphi = y e^{kX}$ und $\nu = e^{kX}$ des Beispieles der ebenen parabolischen Strömung. Man erkennt, daß man aus derselben und der ersten der Geichungen V_{ea} die partiellen Differentialquotienten $\frac{1}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \lg \nu}{\partial x}$ und $\frac{1}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{\partial \lg \nu}{\partial y}$ einzeln bestimmen kann und durch die Operation:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \lg \nu}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lg \nu}{\partial y}\right)$$

eine allgemeine Differentialgleichung von φ erhält, die sämtliche widerstandsfreie Formen der zweidimensionalen Strömungen umfaßt.

Strömungen mit Widerständen.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Widerstand rührt nur von χ-Flächen her.
2. Der Widerstand rührt nur von ψ-Flächen her.
3. Ein dritter Fall ergibt sich durch Beibehaltung der Funktion φ als Querschnittsfunktion und Bestimmung der ψ- und χ-Funktionen in solcher Art, daß die ψ-Flächen Wandflächen von spezieller Form enthalten und die χ-Flächen, wie in den früheren Fällen, und wenn möglich, widerstandsfreie Stromflächen sind; diese Formfunktionen geben dann Kanäle mit ebenen krummlinigen Kanalachsen mit besonders geformten Querprofilen.

Zum ersten Fall.

a) Geradlinige Parallelströmung.

Die Formfunktionen sind:

$$\varphi = x, \qquad \psi = y, \qquad \nu = 1$$
$$A = 1.$$

In Lambs Hydrodynamik S. 670 ist die Untersuchung für den Fall der Bewegung unter Reibung allein durchgeführt; die Resultate sind folgende:

Der Pressungsabfall pro Längeneinheit ist konstant, also

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -k_0.$$

Die Geschwindigkeit v im Abstand z von der Mittelebene zwischen beiden Platten als Koordinaten-Grundebene ist, wenn e den Abstand der Plattenwand dieser Form bezeichnet,

$$v = \frac{k_0}{2\eta}(e^2 - z^2).$$

Hiermit wird analog wie in der Poiseuilleschen Formel mit

$$G = \frac{k_0}{2\eta} \quad \text{und} \quad \lambda = e^2 - z^2 \quad \text{und} \quad A = 1$$

der Anschluß an die verwendete Darstellung gefunden; es werden:

$$v = G\sqrt{A\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{g}{\gamma} \cdot p + k_0 \cdot x = \text{konst.}$$

Die Resultate stehen in Analogie mit denjenigen der Poiseuilleschen Strömung; es steht nichts im Wege, dieselben auf die turbulente Bewegung zu erweitern und namentlich $v = G(e^2 - z^2)^{\frac{1}{4}}$ als angenäherte Isotachengleichung zu betrachten. Er wird jedoch wegen der geringen praktischen Bedeutung davon abgesehen, die ganze Untersuchung weiter durchzuführen.

b) Allgemeine Bewegung.

Ebenfalls auf S. 670 und 671 der Lambschen Hydrodynamik ist unter Hinweis auf Versuche von Prof. Hele Shaw (Trans. Inst. Nav. Arch. 40, 1898) der Beweis erbracht, daß bei einer Strömung zwischen zwei parallelen, dicht nebeneinander befindlichen Platten, die unter dem Einfluß von Reibung allein erfolgt, die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden können

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3\eta}{e^2} v_x'$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{3\eta}{e^2} v_y',$$

worin v_x' und v_y' die mittleren Geschwindigkeitskomponenten an der χ-Linie im Punkte x, y des Strömungsgebietes bezeichnet, woraus hervorgeht, daß

$$\Phi = \frac{e^2}{3\eta} \cdot p$$

als ein Geschwindigkeitspotential betrachtet werden kann.

Zieht man das Ergebnis von S. 111 in Betracht, wonach bei einer Strömung solcher Art die Deformation einer Kugel, deren Mittelpunkt sich in der Mittelebene zwischen zwei Platten bewegt, ohne Rotation erfolgt, so ergibt sich derartige Übereinstimmung mit der Theorie, daß auch in diesem Fall eine Verallgemeinerung zulässig erscheint; es können auch in diesem Fall

$$v_x = G\alpha_1\lambda = G\frac{\partial \varphi}{\partial x}(e^2 - z^2)$$

$$v_y = G\alpha_2\lambda = G\frac{\partial \varphi}{\partial y}(e^2 - z^2)$$

für Bewegung mit Reibung allein gesetzt; während für Bewegung mit Turbulenz $\lambda = (e^2 - z^2)^{\frac{1}{4}}$ angenommen werden kann.

Zum zweiten Fall.

Zwei φ-Flächen sind widerstanderzeugende Führungsflächen, an den Platten $z = \pm e$ ist der Widerstand verschwindend klein; λ wird eine Funktion von ψ.

Analog wie für die Strömung in Rotationsformen ist die Bewegung auf das Netzkoordinatensystem der Formfunktion zu beziehen; es werden bei Annahme von Potentialformen wegen $C = 1$ und $A = B$

$$\delta s_\varphi = \frac{\delta_\varphi}{\sqrt{A}}, \qquad \delta s_\psi = \frac{\nu \delta_\psi}{\sqrt{A}}, \qquad \delta s_\chi = \delta_\chi$$

$$\delta f_\varphi = \frac{\nu \delta_\psi \delta_\chi}{\sqrt{A}}, \qquad \delta f_\chi = \frac{\delta_\varphi \delta_\chi}{\sqrt{A}}, \qquad \delta f_\chi = \frac{\nu \delta_\varphi \delta_\psi}{A}.$$

Das Schema der Einzelpressungen und Spannungen ist dasselbe wie früher; in den χ-Flächen wirken keine Oberflächenspannungen.

Mit diesen Werten der Längenelemente ergibt sich

$$W_\varphi = \left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\sqrt{A}$$

$$W_\psi = \left(G^2 \frac{A}{2}\frac{\partial U}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\frac{\sqrt{A}}{\nu}$$

$$W_\chi = 0,$$

Unter analogen Überlegungen, wie für Strömungen durch Rotationshohlräume, erhält man die beiden Gleichungen

$$-\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\varphi}\cdot\frac{\nu}{A} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\sqrt{A}} = \frac{\gamma}{g}\left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)\frac{1}{\sqrt{A}} \quad \ldots\ldots 1_e$$

$$-\frac{\mathfrak{p}_\chi}{\varrho_\chi}\cdot\frac{\nu}{A} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\mathfrak{p}_\chi \cdot \nu}{\sqrt{A}} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{G^2}{2}A\frac{\partial \nu^2}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\nu\frac{1}{\sqrt{A}} \quad \ldots 2_e$$

ferner die Gleichungen für die Krümmungsmaße:

$$\frac{1}{\varrho_\psi} = -\nu\sqrt{A}\frac{\partial \frac{1}{\nu}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt{A}}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} - \frac{1}{2\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = + \frac{1}{2\nu\sqrt{A}}\cdot\frac{\partial A}{\partial \psi}$$

und hiermit

$$A \cdot \frac{\partial \frac{\mathfrak{p}_\chi}{A}}{\partial \psi} = \frac{\gamma}{g}\left(\Phi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)$$

$$A \cdot \frac{\partial \frac{\mathfrak{p}_\chi}{A}}{\partial \varphi} - \frac{2 \cdot \mathfrak{p}_\chi}{A}\frac{A}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{G^2}{2} A \frac{\partial \mu^2}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\frac{1}{\nu^2}.$$

Setzt man wieder

$$\frac{\mathfrak{p}_\chi}{A} = \mathfrak{P}, \qquad \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\Phi}{A} + \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right) = X, \qquad -2\frac{A}{\nu}\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} = Y,$$

$$\frac{\gamma}{g}\left(\frac{G^2}{2}\frac{\partial \mu^2}{\partial \psi} + \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \psi}\right)\frac{1}{\nu^2} = Z,$$

so folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \varphi} = X; \qquad \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \varphi} = \mathfrak{P} Y + Z.$$

Wechselseitiges partielles Differentiieren führt schließlich zur Gleichung

$$\mathfrak{p}_\chi = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} - YX - \frac{\partial Z}{\partial \psi}}{\frac{\partial Y}{\partial \psi}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3_e$$

Werden in die Ausdrücke für X, Y, Z die einer bestimmten Strömungsform entsprechenden Werte von A und ν eingesetzt, so ergeben sich aus der letzten Gleichung wieder Anhaltspunkte für die Bestimmung der Funktionsformen von λ, Φ, U.

Bei Potentialform wird $Y = 0$ (da $\nu =$ konst. ist); es folgt $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \psi} = X$, $\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \varphi} = Z$; mithin die Bedingung $\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \frac{\partial Z}{\partial \psi}$ oder mit $\nu = 1$, $\mu = \lambda$:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{\Phi}{A} + \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right] = \frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{G^2}{2}\frac{\partial (\lambda^2)}{\partial \psi} + \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial \psi}\right]$$

als orientierende Gleichung für die Wahl von λ, Φ und U.

Es sind auch hier die Fälle zu unterscheiden mit ein oder zwei Wandflächen mit symmetrischer oder nicht symmetrischer Lage derselben.

Die Transformationsgleichungen für die Überführung auf kartesische Koordinaten sind folgende

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\nu}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \psi} = +\frac{\nu}{A}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \ldots\ldots \quad 5_e$$

Es folgt hieraus, daß mit den Annahmen $\Phi = 0$ und $U = \varphi \cdot \psi^3$ und mit der allgemeinen Form

$$\lambda^2 = (\psi_a{}^n - \psi^n) - \frac{\psi_a{}^n - \psi_b{}^n}{\psi_a{}^m - \psi_b{}^m}(\psi_a{}^m - \psi^m)$$

für die Verteilung der Strömungsenergie analoge Verhältnisse sich ergeben wie im Falle der Strömung durch Rotationshohlräume.

Zum dritten Fall.

Wie bei geradem Rohr verschiedene Profilformen dadurch erhalten wurden, daß man zur Querschnittsfunktion φ entsprechende Funktionen ψ suchte, so kann man natürlich auch hier zu verschiedenen Kanalprofilen gelangen, wenn man bei gegebener Funktion φ aus der, die Orthogonalität zwischen den φ- und ψ-Flächen beschreibenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

zuerst die allgemeine Form der ψ-Funktionen bestimmt und dieselbe dann, so wie es beim elliptischen Profil, beim Stollenprofil und beim rechteckigen Profil der Fall war, entsprechend spezialisiert; hierbei ist aber zu berücksichtigen, daß nun diese Bestimmung derart erfolgen muß, daß ψ auch die Variable Z enthält.

Diese Bestimmung wird vermittelt durch die simultanen Differentialgleichungen [1])

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{dZ}{0} = \frac{d\Psi}{0},$$

deren allgemeines Integral die Form hat

$$\Psi = F(f, Z) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{a}$$

worin f eine beliebige Funktion der zu φ gehörigen und bei Potentialform der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$$

entsprechenden Funktion ψ, Z eine beliebige Funktion von z und schließlich Ψ eine beliebige Funktion F der beiden Argumente f und Z ist; denn man erhält:

[1]) Es werden die durch die folgenden Untersuchungen sich ergebenden allgemeinen Formen der Funktionen der Stromflächen mit ψ und χ bezeichnet werden.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = F' f' \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = F' f' \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = F' Z'.$$

F', f', und Z' bedeuten die ersten totalen Differentialquotienten der Funktionen F, f und Z nach den Argumenten (f, Z), ψ und z; hiermit folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot F' f' \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} F' f' \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot F' Z' = 0.$$

Da $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sind, wird hiermit die Bestimmungsgleichung für ψ erfüllt.

Beispiel.

Es sei $\varphi = x^2 - y^2$, und dementsprechend $\psi = 2xy$, mit $\nu = 1$ oder allgemein $\psi = a^2 xy$, mit $\nu = \frac{2}{a^2} = \text{konst.}$

Nimmt man ferner

$$f = (\psi - 2m\sqrt{\psi} + m^2)$$
$$Z = bz^2$$
$$\Psi = (\psi - 2m\sqrt{\psi} + m^2) + bz^2$$

mit b, m als Konstanten an, so erhält man eine Rohrform, die im ebenen Querschnitt $\varphi = 0$ elliptisches oder kreisförmiges Profil hat, wie sich aus folgendem ergibt:

In der Fläche $\varphi = 0$ wird: $x^2 - y^2 = 0$, $x = \pm y$.

Im Schnitt mit der Ebene $x = y$ wird: $\psi = a^2 x^2$
und somit:

$$\Psi = a^2 x^2 - 2ma x + m^2 + b^2 z^2.$$

Die Projektionen der Schnittlinien der Ψ-Flächen auf die Koordinatenebene XOZ sind konzentrische Ellipsen, und daher in der $\varphi = 0$-Ebene Kreise, wenn $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ gesetzt wird; denn es ergibt sich deren Gleichung in der $\varphi = 0$-Ebene mit $x = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$ [1] in der Form

$$\Psi = \left[\left(\xi - \frac{m\sqrt{2}}{a}\right)^2 + Z^2\right] \frac{a^2}{2}$$

$\frac{m\sqrt{2}}{a}$ ist der Abstand des Kreismittelpunktes und ξ derjenige des

[1] Mit ξ als Abszisse gemessen in der $\varphi = 0$-Ebene.

Punktes von der Z-Achse. Mit diesen Ψ-Flächen ist also ein gekrümmtes Rohr dargestellt, das in der $\varphi = 0$-Ebene kreisförmiges Profil hat und sich nach beiden Seiten in der Art zusammmenzieht, daß die Profile ellipsenähnliche Form erhalten mit gleichbleibender Achsenlänge in der z-Richtung; die Profillinien, d. h. die Schnittlinien der φ-Flächen mit den Ψ-Flächen werden aber doppeltgekrümmte Kurven, die allerdings in Querschnittsflächen mit größeren Funktionswerten wieder angenähert ebene Kurven werden.

Es wird hiermit:

$$\Psi = (a\sqrt{xy} - m)^2 + \frac{a^2}{2} z^2$$

die Gleichung der Ψ-Flächen.

Dieses Beispiel zeigt die analytische Anpassung von Kanalformen an eine entsprechende Querschnittsfunktion und ist die Methode natürlich auch anwendbar für allgemeine φ-Funktionen mit drei Variabeln.

Es sind jetzt noch die χ-Flächen zu dem System der φ- und Ψ-Flächen in geeigneter Weise zu bestimmen; im geraden Rohr sowie in den Rotationshohlräumen waren es die im gleichen Bogenabstand verteilten, die Rohrachse enthaltenden Ebenen; denkt man sich in der der grundlegenden Raumteilung entsprechenden Weise in der $\varphi = 0$-Ebene, durch den Mittelpunkt der früher ermittelten Kreise die Radien gezogen, so sind die durch diese Radien und durch die Bahnlinien bestimmten Flächen, die den χ-Ebenen der früheren Fälle analogen χ-Flächen. Diesem Bildungsgesetz entsprechend ergibt sich als Gleichung derselben

$$\chi = \operatorname{arc\,tg} \frac{z \frac{a}{\sqrt{2}}}{a\sqrt{xy} - m} \quad \ldots\ldots\ldots \text{c}$$

denn es wird: $$z \frac{a}{\sqrt{2}} = (a\sqrt{xy} - m) \operatorname{tg} \chi;$$

in der $\varphi = 0$-Ebene ist $$\sqrt{xy} = \frac{\xi}{\sqrt{2}},$$

also

$$z = \left(\xi - \frac{\sqrt{2} \cdot m}{a}\right) \operatorname{tg} \chi,$$

das ist die Gleichung der in der Ebene liegenden und durch den Punkt $\xi = \frac{\sqrt{2} \cdot m}{a}$ gehenden Geraden mit dem Neigungswinkel χ gegen die ξ-Achse.

Entsprechend ihrem Bildungsgesetz enthalten alle diese Flächen die durch den Mittelpunkt der Kreise gehende Bahnlinie und sind orthogonal zu den φ-Flächen, was auch durch ihre Gleichung zum Ausdruck kommt, da dieselbe von der Form $\chi = F(f, z)$ ist; aber sie sind im allgemeinen nicht orthogonal zu dem ψ-Flächen[1]); es tritt dies nur ein für $\chi = 0$, d. i. in der Symmetrieebene der Strömungsform, also $z = 0$ und in der Zylinderfläche $\chi = \frac{\pi}{2}$, deren Koordinaten durch $\sqrt{2}\,xy = m$ bestimmt und deren Erzeugenden parallel zur Z-Achse sind.

Bestimmung der Existenz von freien Oberflächen.

An freien Oberflächen ist die Pressung gleich derjenigen der anliegenden Luftschichten und die Tangentialspannung durch den Einfluß der letzteren verursacht[2]); als einfachster Grenzfall kann konstante Pressung und die Tangentialspannung gleich Null, also die freie Oberfläche als spannungslose Niveaufläche angenommen werden, die der Gleichung

$$\frac{p_a}{\gamma} + h + \frac{v^2}{2g} + \frac{U}{g} = \text{konst.}$$

entspricht, wenn mit p_a die atmosphärische Pressung bezeichnet wird.

Es soll nun untersucht werden, ob und in welchem Umfang die Zylinderfläche $\chi = \frac{\pi}{2}$ eine freie Oberfläche sein kann, da an derselben $p_\chi = p$ angenommen werden kann.

Wird die Z-Achse wagerecht liegend angenommen und die geodätische Höhe vom Horizont des Koordinatenursprungs gemessen, so ist für irgend einen Punkt des Stromgebietes (siehe Fig. 55):

$$h = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.$$

[1]) Es ist der Umstand bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen an einem durch Netzkoordinaten abgegrenzten Element zu berücksichtigen. Die Momentensumme der auf den f_ψ- und f_χ-Flächen des Elementes wirksamen, durch die Pressungen p_ψ und p_χ erzeugten Oberflächendrücke muß gleich Null sein, welche Bedingung nun an Stelle der Mittelwertsbedingung tritt, da dieselbe für die nicht mehr dreifach orthogonalen Flächen f_φ, f_ψ und f_χ nicht mehr verwendbar ist, außer an den bezeichneten Stellen, an denen die Dreifachorthogonalität vorhanden ist.

[2]) Bei inneren Diskontinuitätsflächen dürfte die Bedingung $p_\chi = 0$ wohl nicht zutreffen, da die Existenz der Nebenströmung jedenfalls zumeist durch den Bestand von Tangentialspannungen bedingt ist.

Aus den Formfunktionen:

$$\varphi = x^2 - y^2, \qquad \Psi = (2xy - 2m\sqrt{xy} + m^2) + z^2$$

und

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{2xy} - m}$$

können x, y, z als Funktionen von φ, Ψ, χ bestimmt werden, und diese Werte in A, das im Ausdruck $v^2 = G^2 A \mu^2$ vorkommt, ein-

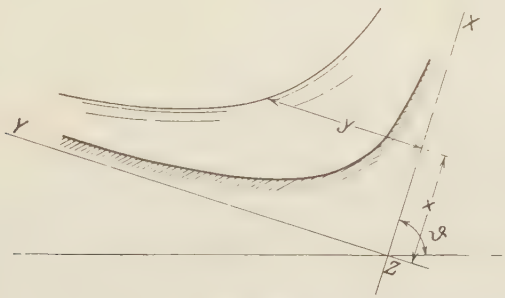

Fig. 55.

gesetzt werden; λ ist ohnehin als Funktion von Ψ anzunehmen; hiermit kann die Gleichung der Niveauflächen vollständig als Funktionsausdruck mit den Variabeln φ, Ψ und χ bestimmt werden; im vorliegenden Beispiel erhält man:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{\Psi}\cos\chi + m)^4 + \varphi^2} + \frac{\varphi}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{\Psi}\cos\chi + m)^4 + \varphi^2} - \frac{\varphi}{2}}$$

$$z = \sqrt{\Psi}\sin\chi$$

$$A = 4(x^2 + y^2) = 4\sqrt{(\sqrt{\Psi}\cos\chi + m)^4 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}$$

Der Mittelpunkt der Kreise in der Fläche $\varphi = 0$ ist hiermit bestimmt durch

$$x = \frac{m}{\sqrt{2}} = y; \qquad z = 0,$$

da für denselben $\varphi = 0$, $\Psi = 0$, $\cos\chi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

ist, und besitzt den Wert $A = 4m^2$.

Setzt man z. B. in Analogie mit den Resultaten für Strömungen in Rotationshohlräumen

$$\mu = \sqrt{\Psi_a^3 - \Psi^3} \qquad \text{und} \qquad U = K\varphi\Psi^3$$

(welche Annahmen ebenso wie dort auf ihre Zulässigkeit durch den Versuch zu prüfen sind), so erhält man für den Mittelpunkt der Kreise in der Fläche $\varphi = 0$:

$$\lambda^2 = \Psi_a^3 \qquad \text{und} \qquad U = 0.$$

Wenn nun die Zylinderfläche eine freie Oberfläche sein soll, so muß in allen ihren Punkten, also auch im Kreismittelpunkt, die atmosphärische Pressung vorhanden sein, also ergibt sich hiermit die Konstante der Niveaugleichung aus

$$\frac{p_a}{\gamma} + \frac{m}{\sqrt{2}} \sin\vartheta + \frac{m}{\sqrt{2}} \cos\vartheta + \frac{2G^2}{g} m^2 \cdot \Psi_a^3 = \text{konst.}$$

Für einen anderen Punkt der Zylinderfläche werden:

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{m^4 + \varphi^2} + \frac{\varphi}{2}}; \qquad y = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{m^4 + \varphi^2} - \frac{\varphi}{2}}$$

$$z = \sqrt{\Psi}; \qquad A = 4\sqrt{m^4 + \varphi^2}; \qquad \lambda^2 = \Psi_a^3 - \Psi^3$$

$$U = K\varphi\,\Psi^3; \qquad v^2 = 2G^2\sqrt{m^4 + \varphi^2}\,(\Psi_a^3 - \Psi^3).$$

Es muß hiermit die Gleichung

$$\left|\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{m^4 + \varphi^2} + \frac{\varphi}{2}} - \frac{m}{\sqrt{2}}\right| \sin\vartheta + \left|\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{m^4 + \varphi^2} - \frac{\varphi}{2}} - \frac{m}{\sqrt{2}}\right| \cos\vartheta$$
$$- \frac{2G^2}{g}\left[\sqrt{m^4 + \varphi^2}\,(\Psi_a^3 - \Psi^3) - m^2\,\Psi_a^3\right] + \frac{K}{g}\varphi\,\Psi^3 = 0$$

für alle Werte von φ und Ψ erfüllt werden, wenn die Zylinderfläche eine freie Oberfläche sein soll.

Mit $\varphi = 0$ werden die Klammerausdrücke von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ und das letzte Glied gleich Null; es bleibt

$$2\frac{G^2}{g}\left[m^2\,(\Psi_a^3 - \Psi^3 - m^2\,\Psi_a^3)\right] = 0.$$

In der Nähe der Symmetrieebene, soweit der Wert von Ψ sehr klein ist, wird die Gleichung annähernd erfüllt; bei Vernachlässigung von Ψ ergibt sich für irgendeinen Wert φ_a von φ ein Wert von ϑ, also eine bestimmte Neigung der Koordinatenebenen, für die die Gleichung erfüllt wird; es kann daher bei dieser Neigung der Koordinatenebenen in der Nähe des Querschnittes φ_a die Zylinderfläche als eine Niveaufläche angesehen werden, deren Gebiet sich um so weiter erstreckt, je weniger der Winkel ϑ mit φ variiert.

Führt man die vollständigen Ausdrücke für x, y und A in die Niveauflächengleichung ein und setzt dann $\varphi = 0$, so erhält man

$$\sqrt{\frac{\Psi}{2}}\cos\chi\sin\vartheta+\sqrt{\frac{\Psi}{2}}\sin\chi\cos\vartheta$$
$$+\frac{2G^2}{g}[m^2(\Psi_a{}^3-\Psi^3)-m^2\Psi_a{}^3]=0.$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß es im Querschnitt $\varphi=0$ für bestimmte Werte von ϑ und G eine Linie gibt, an der p konstant gleich p_0 werden kann, deren Punkte aber mit Ausnahme derjenigen für $\chi=\frac{\pi}{2}$ nicht mehr in der Zylinderfläche liegen.

Bei den angenommenen Funktionsformen erscheinen hiermit nur bestimmt abgegrenzte Teile der zylindrischen χ Fläche als freie Oberflächen geeignet.

Da es noch unendlich viele Variationen für Ψ gibt, die die halbe Randfläche Ψ_a in gleicher Form enthalten, so ist zu erwarten, daß in der geeigneten Wahl der Funktion von Ψ resp. F und Z die Möglichkeit gegeben ist, eine solche Verteilung der Geschwindigkeitsverhältnisse zu erhalten, daß eine der χ-Flächen in weiterem Bereiche als im gegebenen Fall als freie Oberfläche bestehen kann; bestimmt man z. B. die Funktion derart, daß in der $\varphi=0$-Fläche, die Kreise des Ringkoordinatensystems entstehen, also exzentrisch liegende Kreise, deren Mittelpunkte in der Symmetrieebene liegen, so erhält man eine andere Form für die ψ- und die χ-Flächen; es kann hierbei einer der Kreise genau dieselbe Größe und Lage besitzen wie der Randkreis bei der konzentrischen Verteilung und wird daher durch die, durch denselben bestimmte Randfläche dieselbe sein wie früher; die Schnittlinien der χ-Flächen mit der $\varphi=0$-Ebene werden nicht mehr Gerade, sondern die zu den exzentrischen Kreisen orthogonalen Kreise. Derjenige dieser χ-Flächenkreise, der die Symmetrieachse unter rechtem Winkel schneidet, gibt eine sattelförmige χ-Fläche, die geeignet erscheint, sich in weiterem Bereich an die Gleichung der freien Oberfläche anzuschließen, als dies bei der Zylinderfläche der Fall war, worüber nun Untersuchungen ähnlicher Art, wie früher, über den Grad der Annäherung Aufschluß geben können.

Hinweis auf andere Funktionsformen.

Die im Beispiel verwendete Funktionsform für φ, d. i. $\varphi=x^2-y^2$, wurde der Einfachheit halber gewählt; sie gibt die einfachsten Ausdrücke für die Ableitungen, hat aber den Nachteil des asymptotischen Anschlusses der Bahnlinien an die X- und die Y-Achse, d. h. dieselbe kann nur solche Stromformen beschreiben, bei denen die Geschwindigkeiten mit der Entfernung vom Koordinatenursprung stark wachsen; ihr Verwendungsbereich ist daher ein beschränkter: es gibt aber noch andere Potentialformen, bei denen dies nicht der Fall ist, so geben z. B. die Funktionen

$$\varphi=a(x-e^x\cos y)$$
$$\psi=b(y+e^x\sin y)$$
$$\chi=z$$

eine zweidimensionale Potentialströmung, bei der wegen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a(1 - e^x \cos y), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a e^x \sin y$$

in den, in der YOZ-Ebene liegenden, durch die Ordinaten $y = 0$, $+ 2\pi$, $+ 4\pi$ bestimmter Parallelen zur Z-Achse die Geschwindigkeit gleich Null wird; $x = -\infty$ gibt $\frac{\partial v}{\partial x} = a$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, d. h. die Strömung kommt als Parallelströmung mit der Geschwindigkeit a aus dem negativ Unendlichen, geht aber im positiv Unendlichen wieder ins Asymptotische an den Flächen $y = \pm \pi$, $\pm 3\pi \ldots$ etc. über; aber es gibt noch andere Funktionsformen, bei denen auch dies nicht der Fall ist, wie z. B. die zweidimensionalen Strömungen um feststehende Zylinder mit Erzeugenden parallel zur Z-Achse (Fig. 56), die Helm-

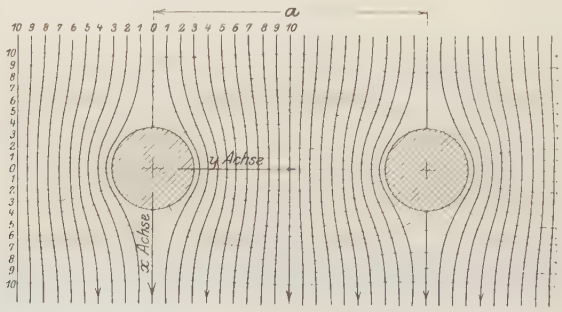

Fig. 56.

holtzsche Strömung aus parallelen Platten, die Strömungen mit freien Strahlen; solche Strömungsformen erscheinen geeigneter z. B. zur Beschreibung ungleichförmig stationärer Bewegungen in offenen Kanälen, also etwa bei Behandlung des Stauproblems; es wird bezüglich solcher Formen auf die Lehrbücher der Hydrodynamik verwiesen, namentlich auf Lamb, sowie wegen der graphischen Bestimmung solche Formen auf Holzmillers Ingenieurmechanik und weiter noch auf Maxwells Elektrizität und Magnetismus, worin auch dreidimensionale Formen bestimmt sind.

Auch über andere Rotationsformen geben die angegebenen Literaturquellen Aufschluß und ist es natürlich auch bei solchen Formen möglich, Kanäle mit krummliniger Achse darzustellen, wenn man das Gebiet nicht um die geometrische Achse des Rotationshohlraumes, sondern um eine andere Bahnlinie abgrenzt.

Im letzten Beispiel wurde die Existenzmöglichkeit einer freien Oberfläche in dem entsprechend der ψ_a-Funktion abgegrenzten Kanal untersucht, und zwar unter Aufnahme der Randbedingung, daß an der freien Oberfläche $\mathfrak{p}_\chi = 0$ sein und dieselbe dem Gebiet angehören müsse, an dem die Netzkoordinaten dreifach orthogonal sind; es wurde dann angenommen, daß dies der Fall sein könne, wenn eine der χ-Flächen diese Eigenschaften besitzt; bei Schichtströmung ist die erste Bedingung in den χ-Flächen an sich erfüllt; die zweite Bedingung wurde bei der angenommenen Strömungsform nur partiell, d. h. an bestimmten Stellen und unter bestimmten Bedingungen erfüllbar gefunden.

Da beim freien Strahl die freie Oberfläche als Begrenzungsfläche zu betrachten ist, so wird, sofern Schichtströmung vorausgesetzt werden kann, als Bedingung anzunehmen sein, daß in den χ-Flächen und in der ψ_a-Fläche der Wert von $\mathfrak{p}_\chi = 0$ sei, wenn die Luftreibung gleich Null gesetzt werden kann.

Beachtet man nun, daß die Gleichungen 3 . . . . $\mathfrak{p}_\chi = 0$ ergeben, wenn die Klammerausdrücke auf den linken Seiten derselben gleich Null werden, daß diese Klammerausdrücke jedoch nur die Funktionen φ und Ψ enthalten, so ist zu erwarten, daß diese Gleichungen zur Bestimmung derjenigen Ψ-Flächen dienen können, in denen $\mathfrak{p}_\chi = 0$ ist und daher als Grundgleichungen für die Bestimmung der freien Strahlen dienen, und daß die experimentelle Untersuchung der freien Oberflächen ein weiteres Mittel zur Untersuchung der Anwendbarkeit der Theorie überhaupt und der Grenzen ihrer Anwendung wird geben können.

Die Dissertation von Herrn Ingenieur Dr.-techn. Hans Grether über „Potentialbewegung tropfbarer Flüssigkeiten in gekrümmten Kanälen" gibt Versuchsresultate von zweidimensionalen Strömungen.

Die von Professor Donat Banki im derzeit beginnenden Band 57 der Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. Nr. 1 im Artikel „Der Energiesatz der kreisenden Flüssigkeit" publizierten Ergebnisse decken sich in Gleichung 2 des Artikels prinzipiell mit den Ergebnissen dieses Kapitels; die von Banki verwendete Versuchsmethode erscheint geeignet zur Prüfung der Zulässigkeit der vorgeschlagenen Darstellungsweise.

5. Stationäre Strömung in bewegten Kanälen. Stationäre Relativströmung.

A. Geometrie der Strömung.

Strömt Flüssigkeit längs fester Wände eines kanalförmig ausgebildeten Hohlraumes, der selbst gegenüber der Erde eine Bewegung besitzt, so heißt die Ortsveränderung der Flüssigkeit gegenüber dem Gehäuse des Hohlraumes deren Relativbewegung, diejenige gegenüber der Erde deren Absolutbewegung.

Die Formen beider Bewegungen sind verschieden und stehen durch die Form und Art der Bewegung des Hohlraumes mit einander in einem bestimmbaren Zusammenhang.

Dieser Zusammenhang läßt sich durch folgende Gedankenexperimente zur Vorstellung bringen:

Denkt man sich eine kleine Kugel mit der Flüssigkeit bewegt, so wird die Bahn derselben von einem Beobachter, der seinen Stand-

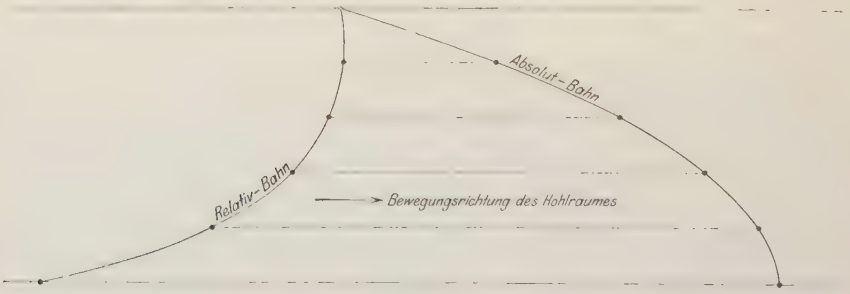

Fig. 57.

ort am Gehäuse des bewegten Hohlraumes hat und daher mit dem Gehäuse bewegt wird, in derjenigen Form gesehen, die der Relativbewegung entspricht, Relativbahn; von einem Standpunkt auf der Erde hingegen in der der Absolutbewegung entsprechenden Form (Absolutbahn). Fig. 57.

Ein bestimmter Zusammenhang der Bahnen macht sich bei dieser Form des Schwimmkörpers nicht direkt bemerkbar.

Denkt man sich jedoch statt der Kugel zwei durch ein Gelenk miteinander verbundene Stäbchen von der fingierten Eigenschaft, daß sich das eine Stäbchen in Richtung der Relativbewegung, das andere in Richtung der Absolutbewegung einstellt, so wird von beiden Standpunkten aus zu beobachten sein, daß im allgemeinen die gegenseitige Lage der Stäbchen bei der Bewegung dieses Instrumentes mit der Flüssigkeit sich ändert, und wenn mehrere solche Schwimmkörper gleichzeitig eingebracht werden, auch an verschiedenen Orten verschieden ist; weiter aber wird zu bemerken sein, daß die Lage des durch die Relativbewegung orientierten Stäbchens sich bei jeder Bewegung des Hohlraumes im wesentlichen an die Richtung der Kanalachse (Mittellinie des Kanals) anschmiegt, während die Lage des durch die Absolutbewegung orientierten Stäbchens sich mit der Bewegung des Hohlraumes ändert; bei Stillstand des Kanals nehmen beide Stäbchen die gleiche Lage an, bei Bewegung des Hohlraumes kreuzen sie sich mehr oder weniger, je nach dessen Geschwindigkeit.

Hiernach ändert sich bei dieser Bewegung hauptsächlich die Form der Absolutbahn, während diejenige der Relativbahn mehr an die Kanalform gebunden bleibt und sich nur in dem Maße ändert, als innerhalb der Kanalform eine Formänderung der Strömung eintritt.

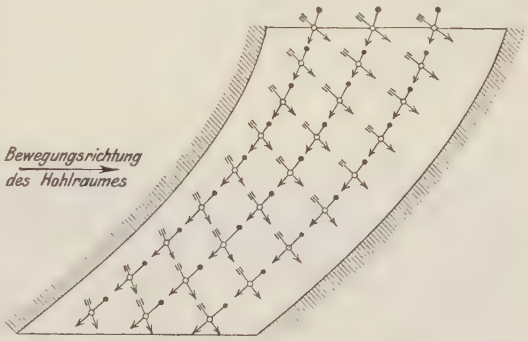

Fig. 58.

Ein anderes Gedankenexperiment ist folgendes: denkt man sich eine große Anzahl solcher Schwimmkörper mit der Flüssigkeit bewegt, so kann sich bei geeigneter Aufeinanderfolge derselben durch Momentphotographie ein Netzbild ergeben, in dem die durch die Relativbewegung orientierten Stäbchen sich zu einem Liniensystem vereinigen, das den relativen Strombahnen entspricht, während die andern Stäbchen sich zu einem das erste schneidenden Liniensystem vereinigen, das die Stromlinien darstellt, nach denen im Moment der Aufnahme die Absolutbewegung stattfindet. Fig. 58.

Ist nun die Bewegung sowohl der Flüssigkeit als auch des Hohlraumes derart beschaffen, daß sich dauernd solche kongruente Netze

aufnehmen lassen und bleibt hierbei auch die Pressung in jedem Punkte dauernd dieselbe, so ist die ganze Bewegung stationär; es kann dies natürlich nur eintreten, wenn die Relativbewegung und die Bewegung des Hohlraumes stationär sind, bleibt aber immerhin ein Abstraktum, da es nur unter ganz besonderen Bedingungen möglich wäre, die Zuflußverhältnisse zum Kanal dauernd stationär zu erhalten; in den Kanälen der Kreiselräder wird die Bewegung im allgemeinen periodisch stationär.

Bei Verwendung derselben Darstellungsweise wie für die stationäre Bewegung in feststehenden Räumen wird es jedoch zweckdienlich sein, vom Abstraktum der stationären Relativbewegung auszugehen, d. h. stationäre Formen derselben anzunehmen und deren Bestandsmöglichkeit und Grenzen zu untersuchen.

Für die mathematische Darstellung wird ein mit dem beweglichen Hohlraum fest verbundenes Koordinatensystem anzunehmen sein; in den auf dasselbe bezogenen Fundamentalgleichungen ist die Zeit als Veränderliche nicht enthalten und sind alle partiellen Ableitungen nach der Zeit gleich Null.

Bestimmt man jedoch die Bewegung in bezug auf ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem im Sinne der Eulerschen Fundamentalgleichungen, so müssen dieselben die Zeit enthalten, da die Punkte des feststehenden Raumes ständig mit anderen Punkten des beweglichen Raumes zur Deckung kommen; nimmt man z. B. den Fall des rotierenden Kreiselrades und legt man die Drehachse desselben in die Z-Achse des feststehenden Koordinatensystems, so wird bei Drehung des Rades irgend ein Punkt des festen Raumes, der innerhalb des Strömungsgebietes liegt, abwechselnd mit Punkten des bewegten Raumes zur Deckung kommen, die in den mit Flüssigkeit erfüllten Räumen desselben und in den Schaufeln liegen; durch den Punkt des festliegenden Raumes geht Materie von verschiedener Art, und daher müssen die Eulerschen Gleichungen, die den Zustand in diesem Punkt beschreiben, die Zeit enthalten. Die Bewegung ist daher formell gegen den festen Raum nicht stationär.

Aus dem Grunde ist es angezeigt, von einer Darstellung der Bewegung durch Gleichungen, die sich auf das feste Koordinatensystem beziehen, abzusehen, und unter Benützung des durch die Mechanik im Satz von Coriolis gegebenen formellen Hilfsmittels den Untersuchungen das bewegte Koordinatensystem zugrunde zu legen.

Es wird hierbei genügen, den Fall geradliniger gleichförmiger Bewegung der Kanäle zur ersten Orientierung und weiter den Fall gleichförmiger Rotation von Kanälen um eine feststehende Achse entsprechend der Anwendung auf Kreiselräder zu behandeln.

Die allgemeinen geometrischen Eigenschaften der Formfunktionen der Relativbewegung sind dieselben wie im Falle des feststehenden Raumes; es sind daher auch alle auf dieselben basierenden geometrischen Methoden sowie das Hilfsmittel der konformen Abbildungen für die graphische Darstellung von Relativströmungen verwendbar.

Als notwendige Ergänzung ist der Zusammenhang der relativen Strombahnen mit den absoluten Momentan-Stromlinien zu untersuchen:

1. Fall.

Die Formfunktionen φ und ψ seien vorerst zweidimensional, mit $\chi = z$; die Kanäle sind begrenzt durch ψ-Flächen und ebene parallele, zur Z-Achse senkrechte Seitenwände (χ-Flächen); es wird angenommen, daß der Widerstand an den Seitenwänden gleich Null sei; es entspricht also die Strömung dem auf Seite 213 behandelten Falle.

Die Kanäle besitzen eine geradlinige gleichförmige Translationsbewegung parallel zur X-Achse.

Die Geschwindigkeitskomponenten der Relativbewegung werden hiermit

$$v_x = G\,\alpha_1 \frac{\lambda}{\nu}, \qquad v_y = G\,\alpha_2 \frac{\lambda}{\nu}, \qquad v_z = 0.$$

λ ist eine Funktion von ψ von der Eigenschaft, daß deren Wert entsprechend der Annahme des Haftens an den Wandflächen der Kanäle; bei einer Aufeinanderfolge gleich großer Kanäle wird hiermit z. B. der Wertverlauf von v längs einer zur X-Achse parallelen Geraden durch eine periodisch verteilte Kurve dargestellt werden können.

Es sei $u = G\,K_u$ die Translationsgeschwindigkeit der Kanäle. Da nun nach dem ersten Gesetz der Relativbewegung in jedem Zeitpunkt die Absolutgeschwindigkeit eines Punktes des in relativer Bewegung befindlichen Körpers gleich ist der Resultierenden aus der Relativgeschwindigkeit dieses Punktes und der Geschwindigkeit, die demselben als Punkt des in Bewegung befindlichen Raumes zukommt, so werden, wenn man mit w_x, w_y und w_z die Geschwindigkeitskomponenten der Absolutbewegung bezeichnet:

$$w_x = v_x + u = G\left(\alpha_1 \frac{\lambda}{\nu} + K_u\right)$$

$$w_y = v_y = G\left(\alpha_2 \frac{\lambda}{\nu}\right)$$

$$w_z = v_z = 0.$$

Die absoluten Stromlinien liegen nach den früheren Erörterungen auf Flächen, die im vorliegenden Fall als Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur Z-Achse erscheinen; wird mit L_a deren Funktion bezeichnet, so folgt

$$d\,L_a = \frac{\partial\,L_a}{\partial\,x}\,d\,x + \frac{\partial\,L_a}{\partial\,y}\,d\,y = 0$$

als Differentialgleichung einer L_a-Fläche, in der dann dx und dy proportional w_x und w_y sind, so daß sich als Bestimmungsgleichung für L_a mit φ_r und ψ_r als Formfunktionen der Relativbewegung wegen

$$\alpha_2 = \frac{\partial \varphi_r}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_r}{\partial x} \nu$$

ergibt:

$$\frac{\partial L_a}{\partial x}\left(+\frac{\partial \psi_r}{\partial y}\lambda + K_u\right) + \frac{\partial L_a}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\cdot\lambda\right) = 0,$$

deren Integration durch das System simultaner Differentialgleichungen vermittelt wird:

$$\frac{dx}{+\frac{\partial \psi_r}{\partial y}\lambda + K_u} = -\frac{dy}{\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\lambda} = \frac{dL_a}{0}.$$

Als allgemeines Integral folgt $L_a = F(\int \lambda\, d\psi_r + K_u y)$, L_a kann eine beliebige Funktion des Argumentes $\int \lambda\, d\psi_r + K_u \cdot y$ sein, damit die Differentialgleichung erfüllt wird; bezeichnet man nun das bei gegebener Funktionsform von λ entwickelbare Integral $\int \lambda\, d\psi_r$ mit L_r, so wird, da jeder ψ_r-Fläche ein bestimmter Wert zukommt, auch durch L_r jeder ψ_r-Fläche ein bestimmter Wert zugeteilt und man ist wieder imstande, die Schnittlinien der L_r-Flächen mit den χ-Ebenen in einer derselben als Konstruktionsebene in solcher Aufeinanderfolge zu zeichnen, daß den einzelnen Linien Werte von L_r zukommen, die um den gleichen Betrag von Linie zu Linie differieren.

Bezeichnet man ferner den Ausdruck $(K_u \cdot y)$ mit L_s, so ist dies ein Funktionsausdruck für Ebenen parallel zur XOZ-Ebene, deren Darstellung zur X-Achse parallele Gerade ergibt, die dann ebenfalls in solcher Aufeinanderfolge (in vorliegendem Fall in gleichen Abständen) gezeichnet werden können, so daß die Funktionswerte der aufeinanderfolgenden Linien wieder um gleiche Beträge differieren; L_s kann als Bahnfunktion der Raumbewegung, L_r als Bahnfunktion der Relativbewegung, L_a als Linienfunktion der Absolutbewegung bezeichnet werden.

Nimmt man nun die einfachste Form des allgemeinen Integrals für L_a, das ist mit den gewählten Bezeichnungen

$$L_a = L_r - L_s,$$

so ergibt sich hiermit die Funktion L_a als Summe der Funktionen L_r und L_s und hiermit die Grundgleichung für die graphische Bestimmung der absoluten Stromlinien durch graphische Funktionsaddition: L_a erhält in denjenigen Punkten gleiche Werte, in denen die algebraische Summe von L_r und L_s konstant ist.

In den Figuren 59a und b, 60a und b ist diese Methode der Stromlinienbestimmung für einen parabolischen Kanal durchgeführt, und zwar in der Figur 59a bei widerstandsfreier Relativbewegung, in der Figur 60a bei widerstandsbehafteter Relativbewegung.

Fig. 59a.

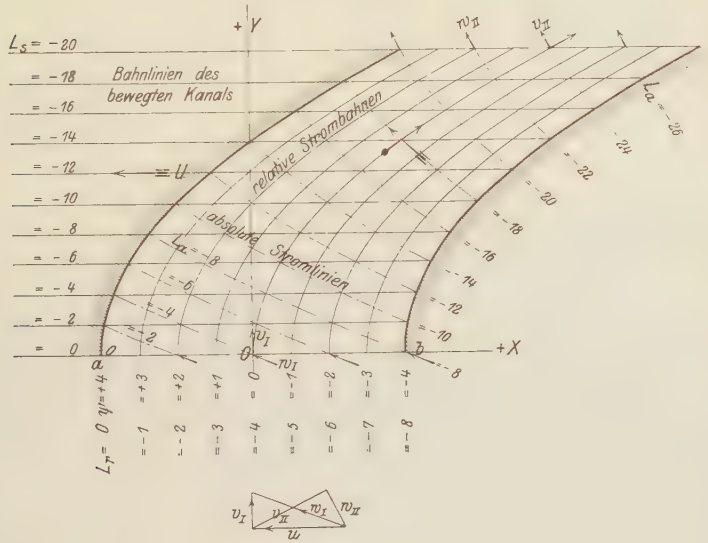

Fig. 59b.

Fig. 59b.

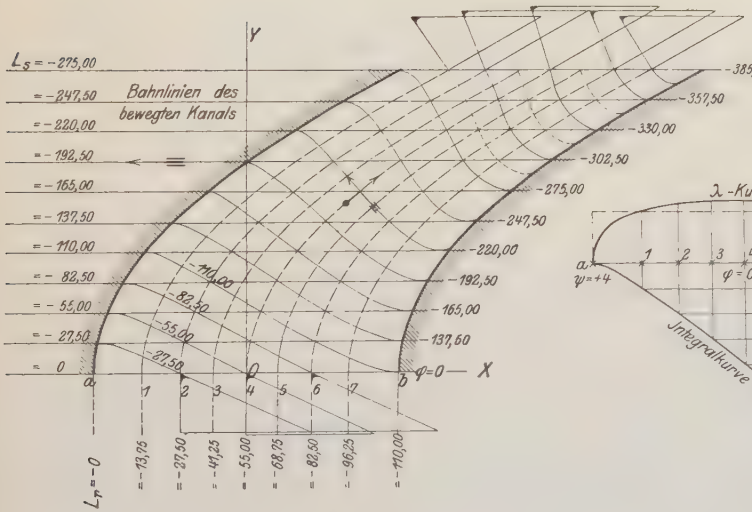

Fig. 60a.

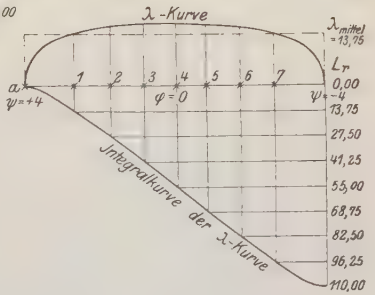

Fig. 60b.

Im ersten Fall ist $\lambda = 1$, mithin $L_r = \int_{\psi_{ra}}^{\psi_r} \lambda \, d\psi_r = \psi_r - \psi_{ra}$, und bei $\psi_{ra} = +4$, $L_r = \psi_r - 4$; der Annahme $K_u = -2{,}5$ entspricht eine Richtung der gleichförmigen Translationsbewegung des Kanals im Sinne des Pfeiles bei u; die Größenverhältnisse der Geschwindigkeiten bei Ein- und Austritt sind durch den der Figur beigegebenen Hodographen gekennzeichnet. Da bei widerstandsfreier Strömung durch den parabolischen Kanal die Relativgeschwindigkeit in allen Punkten einer Parallelen zu OX denselben Wert hat, so sind die Hodographen für alle Strombahnen kongruent.

Im zweiten Fall ist

$$\lambda = \sqrt{\psi_{ra}^4 - \psi_r^4} = \sqrt{4^4 - \psi_r^4}$$

angenommen und wird hiermit

$$L_r = \int_{+4}^{\psi_r} \sqrt{4^4 - \psi_r^4} \, d\psi_r,$$

die graphische Bestimmung der Werte von L_r durch die Integralkurve von λ und die Lagebestimmung der Schnittpunkte der mit gleichen Wertdifferenzen aufeinanderfolgenden L_r-Linien mit der Linie $a\,b$ ist in dem der Stromlinienfigur beigegebenen Diagramm durchgeführt.

Mit $K_u = -34 \cdot 375$ ergibt sich in diesem Fall eine Aufeinanderfolge der L_s-Linien, die derjenigen des ersten Falles identisch ist; man erkennt aus dem Vergleich der beiden Stromliniennetze den Einfluß der Widerstände auf Lage und Form der absoluten Stromlinien; da die Gleichung für λ Haften an den Wänden ψ_{ra} und ψ_{rb} ergibt, so müssen die absoluten Stromlinien an diesen Wändentangenten parallel zur u-Richtung besitzen; aus den der Figur beigegebenen Geschwindigkeitsdreiecken ist die Verschiedenheit der Ein- resp. Austrittsrichtung an den Enden der aufeinanderfolgenden relativen Strombahnen zu erkennen.

Andere Werte von K_u ergeben naturgemäß andere Formen der absoluten Stromlinien.

Durch die Lage der absoluten Stromlinien an den Endquerschnitten des Kanals sind die Richtungen bestimmt, in denen einerseits dem Kanal die Flüssigkeit zugeführt werden muß, damit die den angenommenen Formfunktionen und der eingeführten Funktion λ entsprechende stationäre Relativströmung im Kanal stattfinden kann, mit denen andererseits die Flüssigkeit den Kanal verläßt; die Kenntnis dieser Richtung hat praktische Bedeutung wegen der Ausbildung der Zu- und Ableitungskanäle und wie sich später ergeben wird, bei Berechnung der Kraftabgabe.

Im vorliegenden Beispiel läßt sich das Netz der Relativ- und Absolutbahnen leicht zeichnen, da die L_a-, L_r- und L_s-Flächen Zylinderflächen resp. Ebenen mit Erzeugenden parallel zur Z-Achse und die Konstruktions-(χ-)Flächen Ebenen sind.

Die Methode läßt sich auch für dreidimensionale Formfunktionen anwenden, wobei nun im allgemeinen auch die L_s-Flächen doppelt gekrümmt werden und daher die graphische Darstellung der Netze in der Ebene durch konforme Abbildungen erfolgen muß; es ist hierbei die Funktionsform von L_s zu bestimmen, was jedoch im allgemeinen mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist.

Die graphische Funktionenaddition läßt sich aber auch zur Darstellung der Schnittlinien der Querschnittsflächen benützen.

Bezeichnet man mit φ_r die Querschnittsflächen der Relativbewegung, mit φ_a diejenigen der Absolutbewegung in der dem Stäbchenversuch entsprechenden Netzdarstellung, so werden, wenn man die Relativbewegung als vollkommene Potentialströmung annimmt und $u = G K_u$ als Translationsgeschwindigkeit in der X-Richtung einsetzt:

$$w_x = v_x + u = G\left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} + K_u\right),$$

$$w_y = v_y = G\frac{\partial \varphi_r}{\partial y},$$

$$w_z = v_z = G\frac{\partial \varphi_r}{\partial z};$$

und man erkennt, daß w_x, w_y, w_z von einer Funktion φ_a als Querschnittsfunktion durch die Ansätze:

$$w_x = G\frac{\partial \varphi_a}{\partial x}; \qquad w_y = G\frac{\partial \varphi_a}{\partial y}; \qquad w_z = G\frac{\partial \varphi_a}{\partial z}$$

abhängig gemacht werden können, wobei $\varphi_a = \varphi_r + K_u x$ wird; bezeichnet man $\varphi_s = K_u x$ als Formfunktion der Raumbewegung, so erhält man in

$$\varphi_a = \varphi_r + \varphi_s$$

die Grundgleichung für die graphische Addition der Querschnittsfunktionen; das Verfahren ist nicht mehr an zweidimensionale Strömungsformen gebunden und kann auch auf Grund der Gleichung:

$$\varphi_r = \varphi_a - \varphi_s$$

zur Bestimmung der Flächen φ_r dienen, wenn die φ_a- und φ_s-Flächen gegeben sind.

Schneidet man z. B. eine gegebene und auf gleiche Funktionswertdifferenzen geordnete φ_a-Flächenschar durch Ebenen, die unter-

einander parallel sind und senkrecht zu den φ_s-Flächen stehen, so ergeben sich in diesen Ebenen als Konstruktionsebenen Schnittlinien mit den φ_a-Flächen und Gerade mit den φ_s-Flächen, denen nach algebraischen Reihen geordnete Funktionswerte zukommen; die Verbindungslinien der Punkte mit gleichen Werten $\varphi_a = \varphi_s$ geben in jeder Ebene die Schnittlinie der φ_r-Flächen mit derselben und deren Gesamtheit die Schar der φ_r-Flächen; deren orthogonale Trajektorien geben die Bahnen der Relativströmung, von denen ein Teil durch eine Wandfläche abgegrenzt werden kann.

Man erkennt, daß in diesem Fall beide Strömungen Potentialformen besitzen.

2. Fall.

Die Formfunktionen φ_r und ψ_r seien wieder vorerst zweidimensional, also: $\chi = z$; der Kanal rotiert mit der gegebenen Winkelgeschwindigkeit $\omega = G \cdot K_\omega$ um die Z-Achse; die Funktionen werden zweckmäßig in Zylinderkoordinaten ausgedrückt, die Kanalbegrenzung ist gegeben durch zwei ψ_r-Flächen und zwei χ-Ebenen; letztere sollen wie früher keine Widerstände verursachen, es werden allgemein:

$$v_r = G \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \cdot \frac{\lambda}{\nu}, \qquad v_q = G \frac{\partial \varphi_r}{r \cdot \partial q} \cdot \frac{\lambda}{\nu}, \qquad v_z = 0,$$

λ ist nur eine Funktion von ψ_r, hiermit folgen die Komponenten der Absolutgeschwindigkeit:

$$w_r = v_r = G \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \cdot \frac{\lambda}{\nu}$$

$$w_q = v_q + r\,\omega = G \frac{\partial \varphi_r}{r\,\partial q} \cdot \frac{\lambda}{\nu} + G\,r\,K_\omega,$$

die relativen Strombahnen und die absoluten Stromlinien liegen wieder auf Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur Z-Achse; es folgt analog wie früher

$$d\,L_a = \frac{\partial L_a}{\partial r} d\,r + \frac{\partial L_a}{r\,\partial q} r\,d\,q = 0$$

und als Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion L_a, da $d\,r$ proportional w_r und $r\,d\,g$ proportional w_q sind:

$$\frac{\partial L_a}{\partial r}\left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \cdot \frac{\lambda}{\nu}\right) + \frac{\partial L_a}{r\,\partial q}\left(\frac{\partial \varphi_r}{r \cdot \partial q} \cdot \frac{\lambda}{\nu} + r\,K_\omega\right) = 0.$$

Um zu untersuchen, ob die graphische Funktionsaddition auch in diesem Fall verwendbar ist, wird wieder

$$L_a = L_r + L_s \quad \text{mit} \quad L_s = \int \lambda\,d\,\psi_r$$

gesetzt, es folgt:

$$\frac{\partial L_a}{\partial r} = \lambda \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial L_s}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L_a}{r \partial q} = \lambda \frac{\partial \psi_r}{r \partial q} + \frac{\partial L_s}{r \partial q}$$

und somit

$$\frac{\lambda^2}{\nu} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{\nu} \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial L_s}{\partial r} + \frac{\lambda^2}{\nu} \frac{\partial \varphi_r}{r \partial q} \cdot \frac{\partial \psi_r}{r \partial q} + \frac{\lambda \partial \psi_r}{\partial q} K_\omega$$

$$+ \frac{\lambda \partial L_s}{r \cdot \partial q} \cdot \frac{\partial \varphi_r}{r \cdot \partial q} + \frac{\partial L_s}{\partial q} K_\omega = 0,$$

wegen der Orthogonalität von φ und q sind:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \cdot \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_r}{r \cdot \partial q} \cdot \frac{\partial \psi_r}{r \partial q} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} = - \frac{\partial \psi_r}{r \cdot \partial q} \nu$$

und wird hiermit:

$$- \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \psi r}{\partial q} \frac{\partial L s}{\partial r} + \lambda \frac{\partial \psi_r}{\partial q} K_\omega + \left(\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + K_\omega \right) \frac{\partial L_s}{\partial q} = 0;$$

nimmt man:

$\frac{\partial L_s}{\partial q} = 0$, also $\frac{\partial L_s}{\partial r} = \frac{d L_s}{d r}$, so wird $\frac{d L_s}{d r} = r\omega$; $L_s = \frac{r^2 K_\omega}{2}$, d. h.

die graphische Funktions-Addition nach der Formel $L_a = L_r + L_s$ ist anwendbar, wenn die L_s-Flächen als koaxiale Zylinderflächen genommen werden, die in den χ-Ebenen durch konzentrische Kreise dargestellt sind mit $r = \sqrt{\frac{2 L_s}{K_\omega}}$; dieselbe liefert in ähnlicher Weise wie im früheren Fall das Netz der relativen Strombahnen und absoluten Stromlinien.

Auch in diesem Fall ist Verallgemeinerung möglich; die Bestimmung der Funktion L_s ist, wie früher, mit Schwierigkeiten verbunden; die Verwendbarkeit der Funktionenaddition für die Querschnittsfunktionen ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Setzt man allgemein

$$\left.\begin{array}{lll} w_z = G \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \frac{1}{\nu_a}; & w_r = G \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \frac{1}{\nu_a}; & w_q = G \frac{\partial \varphi_a}{r \partial q} \frac{1}{\nu_a} \\ v_z = G \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} \frac{1}{\nu_r}; & v_r = G \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} \frac{1}{\nu_r}; & v_q = G \frac{\partial \varphi_r}{r \partial q} \frac{1}{\nu_r} \end{array}\right\} \quad \text{a}$$

und $u = G_r : K_\omega$, so folgen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\frac{\nu_r}{\nu_a} \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\frac{\nu_r}{\nu_a} \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial q} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial q}\frac{\nu_r}{\nu_a} - r^2 K_\omega \nu_r, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{b}$$

und aus denselben, wegen

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial \varphi_r}{\partial r}, \qquad \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi_r}{\partial q}$$

die weiteren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\frac{\partial \frac{\nu_r}{\nu_a}}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\frac{\partial \frac{\nu_r}{\nu_a}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\frac{\partial \frac{\nu_r}{\nu_a}}{\partial q} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial q}\frac{\partial \frac{\nu_r}{\nu_a}}{\partial r} - 2 r K_\omega \nu_r - r^2 K_\omega \frac{\partial \nu_r}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi_a}{\partial z}\cdot\frac{\partial \frac{\nu_r}{\nu_a}}{\partial q} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial q}\frac{\partial \frac{\nu_r}{\nu_a}}{\partial z} - r^2 K_\omega \frac{\partial \nu_r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{c}$$

Wird nun $\nu_r = \nu_a = \nu$ genommen, so folgt $\frac{\nu_r}{\nu_a} = 1$, alle Ableitungen dieses Verhältnisses sind gleich Null; man erhält:

$$2 r \nu + r^2 \frac{\partial \nu}{\partial r} = 0; \qquad \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0$$

und hieraus

$$\nu = \frac{Q}{r^2},$$

worin Q eine beliebige Funktion nur von q ist; da wegen $\frac{\delta \nu}{\delta z} = 0$ der Funktionsausdruck für ν unabhängig von z sein muß;

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial q} &= \frac{\partial \varphi_a}{\partial q} - K_\omega \cdot Q. \end{aligned}\right\}$$

Man erkennt, daß durch

$$\varphi_r = \varphi_a - K_\omega \int Q\, dq = \varphi_a - \varphi_s$$

wieder die Anwendbarkeit der graphischen Funktionenaddition begründet ist. Die Formfunktion der Raumbewegung ist

$$\varphi_s = K_\omega \int Q\, dq;$$

die φ_s-Flächen sind Meridianebenen; die Darstellung der Schnittlinien wird in koaxialen Zylinderflächen resp. deren Abwicklungen erfolgen können.

Die Strömungsformen der absoluten und der relativen Bewegung müssen hierbei der allgemeinen Differentialgleichung V_{az} (S. 86) mit $\nu = \frac{Q}{r^2}$ entsprechen; mit $Q = 1$ erhält man: $\varphi_s = K_\omega q$ und die Gleichung V_{az} erhält die Form:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial q^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Nimmt man $\nu_a = 1$ an, so folgt aus der ersten und der dritten der Gleichungen b:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\frac{\partial \nu_r}{\partial q} - \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial q} - r^2 K_\omega\right)\frac{\partial \nu_r}{\partial r} = 0,$$

während die zweite der Gleichungen b die Form erhält:

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\frac{\partial \nu_r}{\partial q} - \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial q} - r^2 K_\omega\right)\frac{\partial \nu_r}{\partial r} = -2 r K_\omega \nu_r.$$

Da die linken Seiten beider Gleichungen identisch sind, so können dieselben nur bei $K_\omega = 0$ bestehen; es ist also bei $K_\omega \neq 0$ Potentialform von φ_a im allgemeinen nicht möglich; dasselbe Resultat erhält man, wenn man $\nu_r = 1$ setzt.

Ist die Strömung rein zweidimensional, also sämtliche Funktionen mit Ausnahme $\chi = z$ unabhängig von z, so entfallen die erste und die dritte der Gleichungen b; man kann dann $\nu_a = 1$ setzen und entsprechende Werte von ν_r beigegebenen φ_a finden, d. h. es sind Potentialströmungen für φ_a möglich.

Diese Ergebnisse können folgendermaßen gedeutet werden:

In einem rotierenden Kanal mit feststehender Achse nehmen die Relativ- und die Absolutbewegung Strömungsformen an, deren allgemeine Differentalgleichung die Funktion ν in der Form $\nu = \frac{Q}{r^2}$ enthält; entspricht die gesamte Kanalbewegung solchen Formen nicht, so tritt diskontinuierliche Strömung ein.

B. Kinematik der stationären Relativströmungen.

Es wurden schon in den letzten Untersuchungen die Geschwindigkeitskomponenten in Zylinderkoordinaten

$$v_z = G\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\frac{\lambda}{\nu_r}; \qquad v_q = G\frac{\partial \varphi_r}{r\partial q}\frac{\lambda}{\nu_r}; \qquad v_r = G\frac{\partial \varphi_r}{\partial r}\frac{\lambda}{\nu_r}$$

eingeführt; der Beweis für die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung bei Annahme dieser Zusammensetzung der Ausdrücke für die Komponenten ergibt sich in analoger Weise wie auf Seite 98.

Da $w_z = v_z$, $w_r = v_r$, $w_q = v_q + r\cdot\omega$, also

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial w_r}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \qquad \frac{w_r}{r} = \frac{v_r}{r}; \qquad \frac{\partial w_q}{r\partial q} = \frac{\partial v_q}{r\partial q}$$

sind, so ergibt sich, daß die Kontinuitätsgleichung für die Absolutbewegung erfüllt wird, wenn dies für die Relativbewegung der Fall ist und umgekehrt.

Ebenso können alle Untersuchungen über die Deformation von Flächen und deren Resultate herübergenommen werden.

Die Wirbelfunktionen von Helmholtz sind in Zylinderkoordinaten bestimmt durch die Gleichungen:

$2\vartheta_q = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$ . . . . . Rotation um den Parallelkreis

$2\vartheta_z = \frac{\partial v_q}{\partial r} + \frac{v_q}{r} - \frac{\partial v_r}{r\partial q}$ . . . . . Rotation um eine Achse $\parallel Z$

$2\vartheta_r = \frac{\partial v_z}{r\partial q} - \frac{\partial v_q}{\partial z}$ . . . . . Rotation um den Radius r.

Nimmt man zur Vereinfachung $G = 1$, ferner $\nu_a = \nu_r = \nu = \frac{1}{r^2}$, und $\lambda = 1$, also

$$v_z = r^2\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}; \qquad v_r = r^2\frac{\partial \varphi_r}{\partial r}; \qquad v_q = r^2\frac{\partial \varphi_r}{r\partial q},$$

an, so werden für die Relativbewegung

$$\vartheta_q = -r\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}; \qquad \vartheta_z = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q}; \qquad \vartheta_r = 0.$$

Für die Absolutströmung wird $w_q = r^2\frac{\partial \varphi_r}{r\partial q} + rK_\omega$, es folgt hiermit für dieselbe $\vartheta_z = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q} + K_\omega$ während ϑ_q und ϑ_r dieselben Werte beibehalten.

Die lineare infinitesimale Deformation hat in beiden Strömungen nirgends Rotationskomponenten um die Radien als Achsen, die resultierenden Rotationsachsen berühren daher in jedem Punkte den denselben enthaltenden Kreiszylinder um die z-Achse, woraus folgt, daß die Wirbellinien dieser Strömung auf diesen Kreiszylindern liegen.

Soll nun die absolute Strömung, in der nur die Schwerkraft als Massenkraft wirksam ist, widerstandsfrei sein, so müssen, wie schon auf S. 117 und 118 erwähnt, die Wirbellinien immer mit denselben Flüssigkeitsteilchen zusammenfallen; im vorliegenden Fall könnte dies nur bei solchen Strömungsformen der Fall sein, bei denen eine um z kreiszylindrische Ausgangsfläche zu anderen Kreiszylindern deformiert wird.

Dies wird eintreten, wenn w_r unabhängig von z und q, mithin entweder $w_r = 0$ oder

$$\varphi_a = R + Y$$

ist, worin R nur eine Funktion von r, Y eine solche von z und q ist.

Nimmt man allgemeiner nach S. 234 $\nu = \frac{Q}{r^2}$, so erhält man auch allgemeinere Formen für widerstandsfreie Strömung, denn es werden hierbei für die Relativbewegung

$$\vartheta_q = \frac{r}{Q}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}; \qquad \vartheta_z = \frac{1}{Q}\frac{\partial \varphi_r}{\partial q}; \qquad \vartheta_r = \frac{r^2}{2}\frac{Q^1}{Q^2}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z},$$

d. h. die resultierende Rotationsachse und somit auch die Wirbelfäden haben allgemeinere Lagen wie oben.

C. Dynamik stationärer Relativbewegungen.

Als Massenkräfte sind neben der Schwerkraft die Ergänzungskräfte der Relativbewegung einzuführen.

I. Fall.

Geradlinig gleichförmige Translation des Hohlraumes.

Die Ergänzungskräfte sind gleich Null, da die Punkte des wandernden Hohlraumes beschleunigungslos sind; die Ergebnisse der Untersuchungen für stationäre Strömungen durch feststehende Hohlräume können übernommen werden; es bedarf nur der Untersuchung des Einflusses der Randzustände bei Ein- und Austritt in und aus dem Hohlraum.

In den Fig. 61 bis und mit 66 ist eine orientierende Untersuchung dieser Art für den parabolischen Kanal durchgeführt:

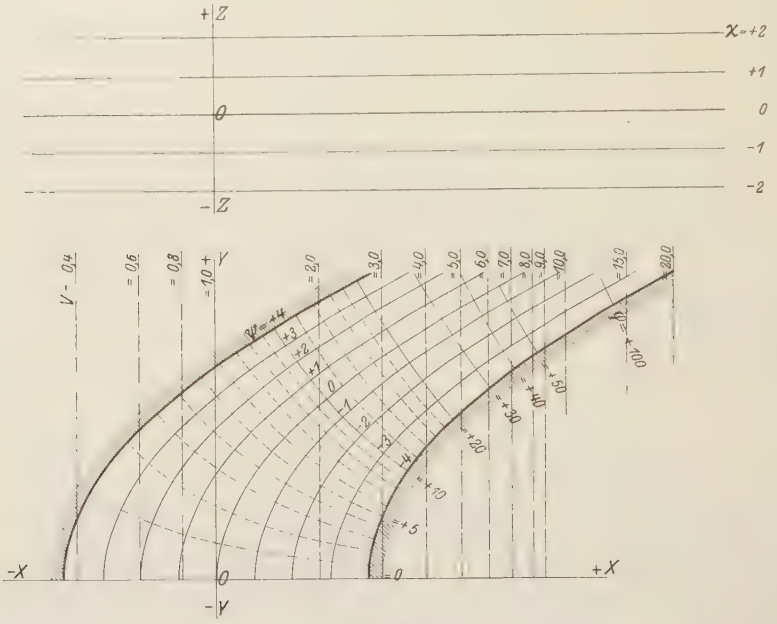

Fig. 61.

Fig. 61 gibt die Strömungsform durch Darstellung der Formfunktionen.

Fig. 62 gibt die Geschwindigkeits- und Pressungszustände bei widerstandsfreier Strömung durch Darstellung der Isotachen und Ni-

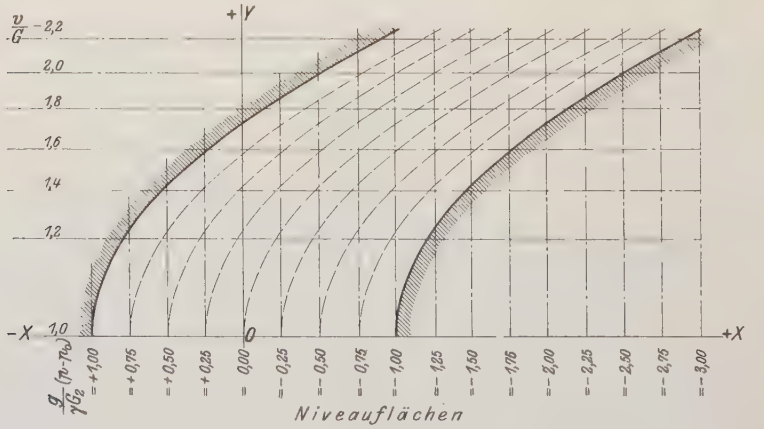

Fig. 62.

veaulinien; es sind behufs allgemeiner Gebrauchsfähigkeit als Isotachen diejenigen Geraden parallel zur X-Achse eingezeichnet, deren Punkten gleiche Werte von $\frac{v}{G}$ zukommen, als Niveaulinien diejenigen Geraden parallel zur y-Achse, denen gleiche Werte von

$$\frac{G}{\gamma G^2}(p - p_0) = -\frac{x}{4}$$

zukommen. Der Einfluß der Schwerkraft auf die Pressungsverteilung ist nicht berücksichtigt.

Da die Längenbezugseinheit $e = 1$ cm angenommen ist, so ist G in cm/sek, $g = 981$ cm/sek^2, $\gamma = 1$ g $= 0{,}001$ kg einzusetzen; man erhält dann v in cm/sek und p in g resp. kg/cm^2.

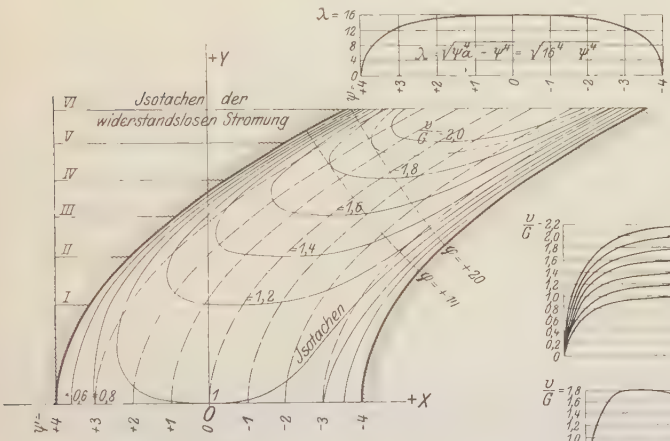

Fig. 63a.

Fig. 63b.

Fig. 63c.

In Fig. 63a sind die Isotachen bei widerstandsbehafteter Bewegung unter der Annahme von

$$\lambda = \sqrt{\psi_a^4 - \psi^4} = \sqrt{4^4 - \psi^4},$$

und zwar wieder durch Zeichnung derjenigen Linien dargestellt, deren Punkte gleiche Werte von $\frac{v}{G}$ besitzen. Die Bestimmung der Punkte dieser Isotachen erfolgte mit Hilfe der oberen Nebenfigur 63b, unter Berücksichtigung der Relation

$$\frac{v}{G} = \sqrt{A} \cdot \frac{\lambda}{\nu} = \left(\frac{\sqrt{A}}{\nu}\right)\lambda = (v')\,\lambda,$$

worin $v' = \frac{V A}{\nu}$, d. i. der Wert von $\frac{v}{G}$ für widerstandsfreie Bewegung ist: die untere Nebenfigur 63c gibt die Geschwindigkeitsverteilung in einer Querschnittsfläche.

Der obigen Annahme von λ entspricht Widerstandslosigkeit der ebenen Seitenwände.

In Fig. 64a sind die Niveaulinien in diesem Kanal für zwei Fälle dargestellt, in den Diagrammen Fig. 65 und 66a und b deren graphisch-rechnerische Bestimmung durchgeführt.

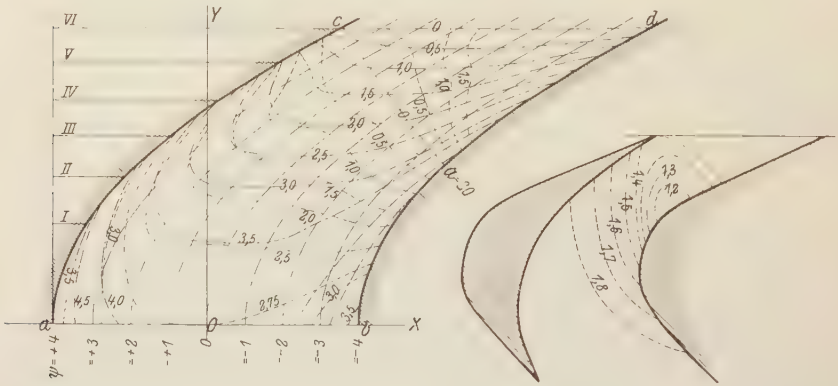

Fig. 64a. Fig. 64b.

Diese Bestimmung erfolgte unter nachstehenden Überlegungen: Da die Strömungsform eine widerstandslose Bewegung zuläßt, so nimmt die hydrodynamische Grundgleichung XXIII bei Vernachlässigung des Schwerkraftgliedes die Form an

$$\frac{g}{\gamma} d p + d \frac{v^2}{2} + \Phi d \varphi + d U = 0 .$$

Es wurden nun, wie bei den früher untersuchten Strömungsformen $\Phi = 0$ und $U = \varphi \Psi$ mit Ψ als einer, folgenden Bedingungen unterworfenen Funktion von ψ angenommen:

Fall A: Ψ ist derart zu bestimmen, daß die Querschnittsfläche $\varphi = 20$ zu einer Niveaufläche mit dem Pressungswert $p = p_0$ wird;

Fall B: Ψ ist derart zu bestimmen, daß die Endfläche cd zu einer Niveaufläche mit dem Pressungswert $p = p_0$ wird.

In beiden Fällen soll U in derjenigen Fläche $\psi = \psi_0$ den Wert Null annehmen, in der den Schnittpunkten mit den benannten Grenzflächen der größte Wert von v zukommt, das sind im Fall A die Fläche $\psi = +1{,}5$, im Fall B die Fläche $\psi = 0$. Die Begründung dieser Annahme wird weiter unten erfolgen.

Obige Differentialgleichung gibt integriert mit $\Phi = 0$ und $U = \varphi \cdot \Psi$ allgemein:

$$\frac{g}{\gamma} p + \frac{v^2}{2} + \varphi \Psi = \text{konst.}$$

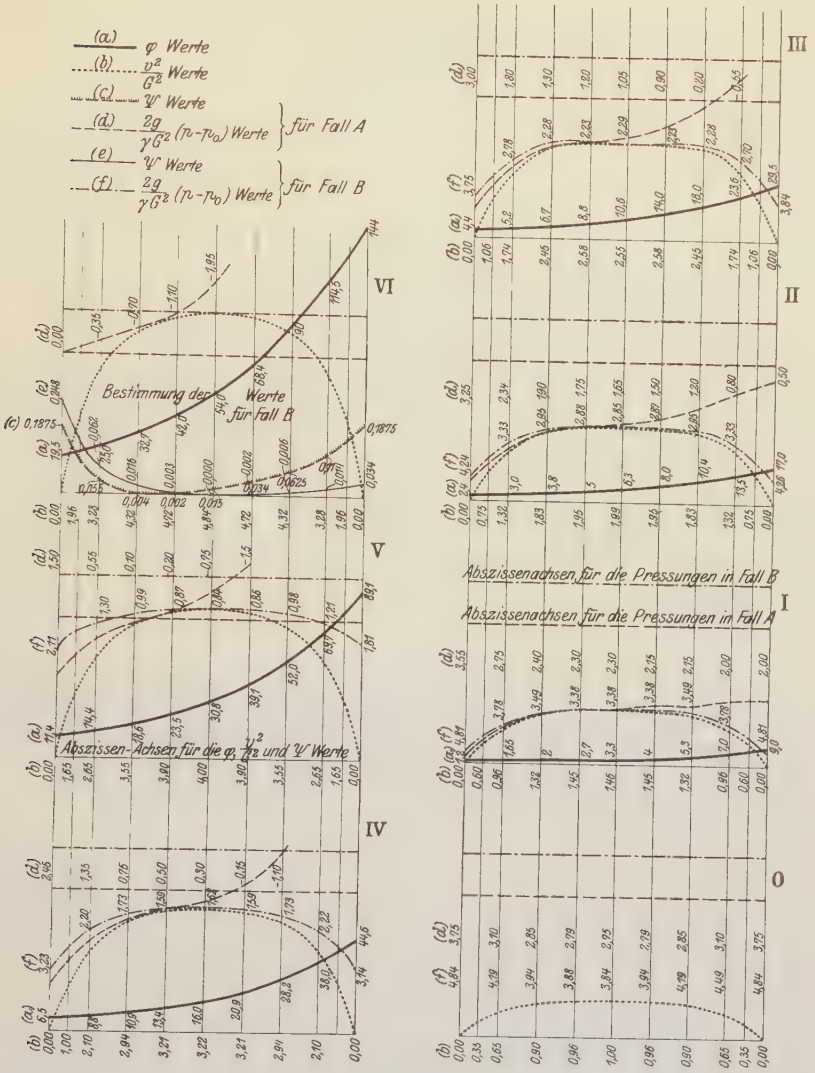

Fig. 65.

und wird in der Fläche $\varphi = 20$ für irgendeine ψ-Fläche

$$\frac{g}{\gamma} p_0 + \frac{v^2}{2} + 20 \Psi = \text{konst.}$$

für die ψ_0-Fläche mit $\Psi = 0$ und $v = v_0$

$$\frac{g}{\gamma} p_0 + \frac{{v_0}^2}{2} = \text{konst.},$$

somit

$$20\,\Psi = \frac{{v_0}^2}{2} - \frac{v^2}{2}$$

oder

$$\frac{2\,\Psi}{G^2} = \frac{1}{20}\left[\left(\frac{v_0}{G}\right)^2 - \left(\frac{v}{G}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad *$$

Auf dieser Beziehung beruht die in Fig. 66b durchgeführte Bestimmung der Ordinatenwerte der dort als Ψ-Linien bezeichneten Summe für den Fall A, und in der ersten der Fig. 65 zu Fall A.

Es folgt ferner

$$\frac{g}{\gamma}(p - p_0) + \frac{v^2}{2g} + \varphi\,\Psi = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

oder

$$\frac{2\,g}{\gamma\,G^2}(p - p_0) + \left(\frac{v}{G}\right)^2 + \frac{2\,\Psi}{G^2}\cdot\varphi = \left(\frac{v_0}{G}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad *$$

als Bestimmungsgleichung für die Werte von $\frac{2\,G}{\gamma\,G^2}(p - p_0)$ für die verschiedenen Punkte des Strömungsgebietes, für die nun v, φ, Ψ bekannt sind, die in den Figuren 65 in leicht ersichtlicher Weise für beide Fälle benützt ist; aus diesen Figuren konnte die Pressungsverteilung längs der einzelnen Bahnlinie in der linken Figur 66a und hieraus die Bestimmung der Punkte der einzelnen Niveaulinien in Fig. 64a durchgeführt werden.

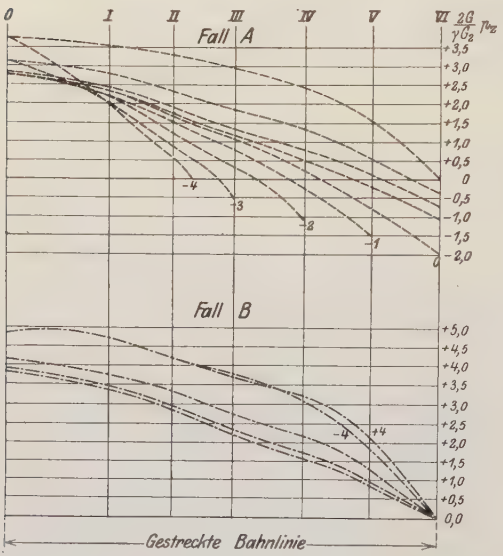

Fig. 66a.

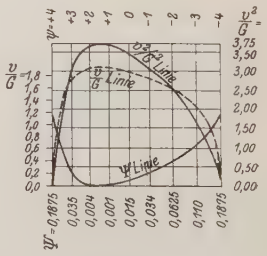

Fig. 66b.

Zum Vergleich wurde in Fig. 646, Seite 240, die Darstellung einer durch Versuche bestimmten Pressungsverteilung in Leitkanälen für Dampfturbinen aus der Promotionsarbeit des dipl. Maschineing. Herrn Dr. techn. Walter Anderhub reproduziert. Diese Versuche wurden in der kalorischen Abteilung des Maschinenlaboratoriums der Eidg. techn. Hochschule in Zürich durchgeführt.

Der Versuchskanal hat zwar nicht parabolische Form der Leitwände und war mit Dampf nicht mit Wasser beaufschlagt; es dürfte trotzdem ein Vergleich wenigstens hinsichtlich des allgemeinen Verlaufes der Niveaulinien zulässig sein. Derselbe gibt für den Fall A insofern Übereinstimmung, als die Niveaulinien qualitativ ähnlichen Verlauf zeigen, indem die in die konvexen Leitflächen fallenden Enden derselben näher am Eintrittsquerschnitt liegen als deren Enden in der konkaven Leitfläche; im Fall B liegen die Enden nach der theoretischen Bestimmung nahezu in gleicher Entfernung von den Punkten a und b; im Versuchskanal ist gegen den Austritt keine Querschnittsfläche als Niveaufläche zu erkennen; auch an der engsten Stelle hat die Pressung im Querschnitt verschiedene Werte in verschiedenen Punkten; daß im Versuchskanal eine Pressungszunahme gegen den Austritt hin stattfindet, entspricht der in dieser Richtung stattfindenden Erweiterung; die im Fall A nach $\varphi = 20$ bestimmte Abnahme der Pressung entspricht hingegen der der angenommenen Geschwindigkeitsverteilung zukommenden Vergrößerung der Geschwindigkeit; es erscheint durchaus nicht ausgeschlossen, durch Annahme einer anderen Funktionsform für λ im Fall A einen den Versuchsergebnissen noch näherkommenden Verlauf der Niveaulinien erreichen zu können, und zwar dann, wenn λ darauf gewählt wird, daß der Wert v_0 in der φ-Fläche näher an die konvexe Leitfläche zu liegen kommt; es ist nämlich ersichtlich, daß die namentlich an der berechneten Niveaulinie des Falles 1 auftretende Ausbuchtung auf die Annahme zurückzuführen ist, daß längs der den Wert v_0 enthaltenden ψ-Fläche $U = 0$ sei; diese Annahme wurde unter der Anschauung gemacht, daß die Widerstände beiderseits gegen das Innere zu abnehmen.

Die Annahme $\Phi = 0$ beruht auf der Anschauung, daß im Kanal keine Ursachen zu einer unstetigen Änderung der Widerstände vorhanden sind.

Wenn nun auch Erscheinungen von Dampfströmungen nicht unmittelbar zum Vergleich mit solchen von Wasserströmungen dienen können, so dürfte doch die Brauchbarkeit der Methode für die Darstellung der Strömungs- und Pressungszustände genügend erwiesen sein, ihre weitere Anwendung erfordert in erster Linie die Durchführung entsprechend organisierter Versuche.

Wie sich aus dem Beispiel der Strömungsnetze in einem para-

bolischen Kanal ergibt, ist die Richtung der absoluten Geschwindigkeiten bei Vorhandensein von Strömungswiderständen sowohl am Eintritt als auch beim Austritt verschieden für die einzelnen Punkte der betreffenden Querschnittsflächen; es bedingt dies, daß, sofern die Zuleitung durch ein Kanalsystem mit stationärer Strömung stattfindet, im Kanal selbst zuerst eine nicht stationäre Strömung eintritt, die dann unter dem Einfluß von Reibung und Turbulenz sich zu einer stationären Hauptströmung herausbilden kann. Diese Störung am Eintritt ist nach den Ergebnissen der Versuche von Pfarr in Kreiselrädern immer der Fall beim Übergang vom Leitrad in das Laufrad und kann deshalb, weil der Widerstand der Begrenzungswände jedenfalls nicht vermieden werden kann, nicht beseitigt, sondern durch passende Formgebung, die eine baldige Überführung in den stationären Zustand ermöglicht, nur gemildert werden.

Hierbei kommt noch der Umstand in Betracht, daß, wie schon früher erwähnt, infolge der materiellen Ausbildung der Teilung des Strömungsgebietes in einzelnen Zellen der Übergang vom feststehenden Zuflußraum in den Radraum einen periodischen Strömungszustand an dieser Stelle bedingt.

Die bereits im alten Turbinenbau ausgeführte Parallelführung des Wassers durch die Schaufelung und die Ausbildung eines entsprechenden Schaufelspaltes, die von den Turbinenbauern Amerikas zuerst als günstig erkannt wurde, tragen der Notwendigkeit der Milderung dieser störenden Einflüsse Rechnung. Der nicht stationäre Übergang vom Rad in den Abflußraum hat naturgemäß Einfluß auf die Strömung im Abflußraum und wirkt hiermit störend auf den Beginn der Strömung im Saugrohr.

Ein anderes Mittel zur Milderung der Strömungen beim Übergang vom Leitrad ins Laufrad im Falle der Turbine oder umgekehrt vom Laufrad ins Leitrad im Falle einer Pumpe besteht in der passenden Wahl des Leitradwinkels unter Berücksichtigung der aus dem Netz der absoluten Stromlinien und der relativen Strombahnen und der Verteilung der Durchflußmengen sich ergebenden mittleren Eintritts- resp. Austrittswinkel.

Die Wirksamkeit dieses Mittels wurde in der Maschinenfabrik der Herren Gebrüder Sulzer in Winterthur durch ausgedehnte, von Herrn Karl Sulzer-Schmid organisierte und geleitete Versuche sowohl an Modellen als auch an Ausführungen größten Umfanges von Zentrifugalpumpen und Axialpumpen erkannt und quantitativ verfolgt.

Diese Ergebnisse bezüglich der Strömungsstörungen am Ein- und Austritt des bewegten Kanalsystems haben natürlich auch Gültigkeit für den

II. Fall.

Gleichförmige Rotation des Hohlraumes um eine feststehende Achse.

Die Fundamentalgleichungen solcher Strömungen sind in der Studie des Verfassers „Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen", Schweiz. Bauzeitung, Bd. XLI, Nr. 19, 21, 22, 25, 26 für widerstandslose Bewegungen abgeleitet und auf Grund derselben eine weitere Studie im Bd. XLVIII, Nr. 23, 24, 25 derselben Zeitschrift „Die Bestimmung der Kranzprofile und der Schaufelformen für Turbinen" veröffentlicht worden; dieselben lauten für die stationären Relativbewegungen, bezogen auf das Zylinderkoordinatensystem mit den in vorliegendem Buche verwendeten Bezeichnungen und unter Einführung der Widerstandsbeschleunigungskomponenten mit der Z-Achse als Hauptachse des Koordinatensystems:

$$K_z - W_z - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_q\frac{\partial v_z}{r\partial q}$$

$$K_r - W_r + r\omega^2 + 2v_q\omega - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r} = v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_q\frac{\partial v_r}{r\partial q} - \frac{v_q^2}{r}$$

$$K_q - W_q - 2v_r\omega - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{r\partial q} = v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r\frac{\partial v_q}{\partial r} + v_q\frac{\partial v_q}{r\partial \varphi} + \frac{v_r \cdot v_q}{r}.$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_q}{r\partial q} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0.$$

Die Glieder $r\omega^2$ und $2v_q\omega$ in der zweiten Gleichung und $-v_r\omega$ in der dritten Gleichung sind die Beschleunigungen der Ergänzungskräfte; dieselben sind Massenkräfte, daher nicht erst in Oberflächenkräfte zu überführen, und beeinflussen als solche nur die Wertverteilung der Pressung, aber nicht diejenige der Spannungen. Die Relativbewegung im Kanal wird gleichzeitig zur Absolutbewegung, wenn der Kanal stillsteht, d. h. wenn $\omega = 0$ gesetzt wird (es ist dies natürlich nicht dieselbe Absolutbewegung, die der Strömung durch den bewegten Kanal entspricht).

Die Fundamentalgleichungen der Relativbewegung bei bewegtem Kanal unterscheiden sich von denjenigen beim stillstehenden Kanal nur durch das Vorhandensein der Glieder, die ω enthalten.

Es können daher auch alle Glieder, die beiden Formen gemeinsam sind, bei den Operationen, die zur Gleichung XXIII führen,

in gleicher Weise vereinigt werden wie früher und sind die ω-Glieder entsprechend beizufügen; dies führt auf

$$\int_0^p dp - d\frac{v^2}{2} - g\,dh + \left| W_z\,dz - W_r\,dr + W_q\,r\,dq \right) - G^2\mu\left(A\,d\mu + \mu\nabla^2 q_r\,dq_r\right)$$

$$- G^2 K_\omega^2\, d\frac{r^2}{2} - G^2 K_\omega^2 \left(\frac{\partial q_r}{r\partial q}\,\mu\,dr - \frac{\partial q_r}{\partial r}\,\mu\,r\,dq\right)\Bigg| = 0 \quad . \quad . \quad \text{XXIII}_R$$

als hydrodynamische Grundgleichung der Relativbewegung; als mathematische Bedingung ergibt sich hieraus, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer ein vollständiges Differential sein muß; beim Glied $G^2 K_\omega^2\, d\frac{r^2}{2}$ ist dies bereits der Fall: es kann daher vor die Klammer genommen werden.

Werden W_z, W_r und W_q gleich Null angenommen, so geht die Gleichung XXIII_R in diejenige für widerstandsfreie, d. i. reibungs- und turbulenzfreie Bewegung über.

Ergänzt man nun in allen Stufen der Ableitungen, die zu den Gleichungssystemen XXIV bis XXVII führten, die Ansätze mit den, den ω-Gliedern entsprechenden Ausdrücke, wobei natürlich entweder die ursprünglichen Gleichungen auf Zylinderkoordinaten oder die Fundamentalgleichungen auf kartesische Koordinaten zu transformieren sind, so erhält man analoge Systeme XXIV_R bis XXVII_R und können aus denselben die Schlußfolgerungen betreffs des Bestandes von widerstandsfreien Formen und für die Wahl von Hilfsfunktionen zum Ersatz von W_z, W_r und W_q abgeleitet werden.

Die Ausführung dieses allgemeinen Operationsplanes führt zu folgenden Grundsätzen.

1. Es gibt für die Relativbewegung im bewegten Kanal ebenfalls Formen, bei denen widerstandsfreie Bewegung möglich wäre[1].

2. Es können dies jedoch nur im Falle der reinen zweidimensionalen Strömung, bei der es also in der Z-Richtung innerhalb des Strömungsgebietes keine Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Z-Achse gibt, Potentialformen sein; dieser Grundsatz wurde bereits von Grashof in seiner „Theoretischen Maschinenlehre", erster Band, ausgesprochen.

3. In dreidimensionalen Strömungsformen kann widerstandsfreie Relativbewegung bei solchen Formen eintreten, die durch das angegebene Verfahren der Funktionsaddition widerstandsfreie absolute Strömungsformen ergeben; dies folgt aus den Ergebnissen auf Seite 237.

[1] Es sind dies solche Formen, deren Funktionen den Klammerausdruck von XXIII_R bei $W_z = W_r = W_q = 0$ zu einem vollständigen Differential machen.

Die praktische Anwendung dieser Grundsätze ergibt sich aus der Umkehrung: Wird aus einer widerstandsfreien Strömungsform bestimmter Art, deren Netz um eine Achse als Drehachse gruppiert ist, durch Funktionsaddition eine relative Strömungsform abgeleitet, so ist dieselbe eine widerstandsfreie Form der Relativströmung, so daß ein Teil des Gebietes als Kanal eines Kreiselrades abgegrenzt und durch entsprechende Aneinanderreihung die räumliche Gestaltung desselben erfolgen kann; innerhalb jedes Kanals kann dann die unter dem Einfluß der Widerstände vor sich gehende Ausbildung von Schichtströmungen angenommen werden; hiermit ist der Anschluß an die verwendete Darstellungsweise erreicht.

In früheren Studien wurden speziell solche Strömungsformen für widerstandsfreie Bewegungen ermittelt, bei denen die Strömung in Rotationsflächen verläuft; diese Beschränkung ist aber nach obigem gar nicht nötig; im materiellen Ausbau muß man allerdings bei Verwendung allgemeinerer Formen auf die innere Formgebung der Kranzprofilflächen durch Schablonenformerei verzichten, was aber namentlich bei Kernformerei gar keine, bei Blechschaufeln gewiß nur leicht überwindliche Schwierigkeiten bietet; es können hierbei die Kanalformen immer so gewählt werden, daß am Eintritt oder allgemeiner dort, wo der Übergang von feststehenden Leitsystemen ins bewegte Rad stattfindet, die Rotationsform erhalten bleibt.

Mit dieser Erkenntnis und bei dem Umstand, daß die Ergänzungskräfte ohne Einfluß auf die Spannungen $\mathfrak{p}$ sind, ergibt sich aber die Möglichkeit einer Übertragung der Ergebnisse bezüglich der Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung entsprechender ψ- und χ-Funktionen aus einer für widerstandsfreie Bewegung gefundenen φ-Funktion und Einführung der λ-Funktion.

Gestatten die Normalbewegung oder die Zustände am Zu- und Abfluß die Ausbildung widerstandsfreier Formen nicht, so ist die Strömung a priori mit Turbulenz, also mit Widerständen verbunden.

Hydraulische Bewegungsgleichungen.

a) Hydraulische Fadenströmung.

Beschränkt man das Strömungsgebiet auf einen elementaren Kanal und faßt die Widerstände zusammen in ein Glied $W_s d s_q$, so folgt die hydraulische Grundgleichung der Relativbewegung in der Form:

$$\frac{g}{\gamma} dp + g dh + d\frac{v^2}{2} - d\frac{r^2\omega^2}{2} + W_s d s_\varphi = 0,$$

da längs einer Bahn das letzte Glied verschwindet; integriert gibt dieselbe eine der Grundgleichungen der hydraulischen Kreiselräder-theorie, Fadentheorie nach Poncelet

$$\frac{p}{\gamma} + h + \frac{v^2}{2g} - \frac{r^2\omega^2}{2g} + \int W_s ds_\varphi = \text{konst.}$$

b) Hydraulische Flächenströmung.

Beschränkt man das Strömungsgebiet nicht auf einen elementaren Kanal, wohl aber auf eine unendlich dünne Schichte, gebildet von ψ-Flächen als Schaufelflächen, so erhält man eine hydraulische Schichtströmung, die zweite Kanalbegrenzung ist durch χ-Flächen gebildet, die bei unendlich vielen Schaufeln zu Linien zusammenschrumpfen und als solche in ihrer Aufeinanderfolge in eine Rotationsfläche zu liegen kommen.

Es gibt dies die Grundlage zu hydraulischen Flächentheorien für Kreiselräder, die sich durch entsprechende Wahl der Flächenfunktionen χ und ψ unterscheiden können; ein Spezialfall ist die Theorie von Professor Dr. Lorenz-Danzig (siehe „Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder" von Dr. Hans Lorenz, 2. Auflage, Druck und Verlag von R. Oldenburg). Die χ-Flächen sind hierbei als Rotationsflächen mit der Funktionsform $r^2 z$ ausgebildet[1]); die ψ-Schaufelflächen sind Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur Z-Achse; deren Funktionsform ist offen gelassen und nur Winkelrichtigkeit bei Ein- und Austritt, sowie mit Rücksicht auf die Ausführung mit endlicher Schaufelzahl die momentlose Formgebung bei Ein- und Austritt zur Bedingung gemacht.

Verzichtet man auf eine Rotationsform für die χ-Flächen, was nach den früheren Erörterungen auch praktisch ausführbar erscheint, so kann man unendlich viele Formen erhalten, die sich den im praktischen Turbinenbau verwendeten und bewährten Profilformen mehr anschließen als die $r^2 z$-Form, und bei denen dann auch bei endlicher Schaufelzahl Schichtströmung eintreten kann, die durch die Funktion λ zu beschreiben ist; solche Formen können dann ebensowohl für den Ausbau einer Flächentheorie, als auch einer Theorie, die von vornherein auf eine endliche Schaufelzahl abstellt, gebraucht werden.

c) Momentensatz von Euler.

Für den dreidimensionalen Kanal nimmt die Gleichung XXIII für Schichtströmungen, die in widerstandslosen Formen unter dem Einfluß der Widerstände entstehen, die Form an:

[1]) Im Band 56, Nr. 51 der Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing. hat Dr. ing. Bauersfeld die Theorie von Lorenz für die Ausbildung von Schaufelformen zwischen anderen Rotationsflächen als Profilflächen erweitert.

$$\frac{g}{\gamma} dp + d\frac{v^2}{2} + g\,dh - \frac{d\,r^2\,\omega^2}{2} + dU = 0,$$

und wenn man hierin $U = K\,\Psi\,\varphi$ einführt, wobei Ψ eine unter analogen Überlegungen wie früher nur bestimmende Funktion von ψ ev. auch χ ist.

$$\frac{g}{\gamma} dp + d\frac{v^2}{2} + g\,dh - \frac{d\,r^2\,\omega^2}{2} + K\,\Psi\,d\varphi = 0.$$

Wegen $v_z^2 = w_z^2$, $v_r^2 = w_r^2$, ferner: $v_q = (w_q - r\omega)$, mithin:

$$v^2 = w^2 - 2\,w_q\,r\,\omega + r^2\,\omega^2,$$

folgt bei entsprechender Ordnung und Multiplikation mit

$$\frac{\gamma}{g} v\,\delta f_\varphi = \delta m,$$

d. i. die durch die Fläche δf_q in der Zeiteinheit fließende Flüssigkeitsmasse:

$$\frac{g}{\gamma}\delta m\,dp + (\delta m)d\frac{w^2}{2} + (\delta m)\,d\,h + (\delta m)\,(K\,\Psi)\,d\varphi = (\delta m)\,d\,(w_q\,r\,\omega),$$

und da längs des elementaren Kanals $\delta m = \text{konst.}$ und auch $K\,\psi^3$ konstant ist, so folgt

$$\frac{g}{\gamma}\delta m\,(p_{II} - p_I) + (\delta m)\left(\frac{w_{II}^2}{2} - \frac{w_I^2}{2}\right) + (\delta m)\,(h_{II} - h_I)$$
$$+ \delta m)\,K\,\Psi(\varphi_{II} - \varphi_I) = (\delta m)\,(w_{q\,II}\,r_{II}\,\omega - w_{q\,I}\,r_I\,\omega),$$

der Ausdruck

$$\frac{g}{\gamma}\delta m\,p_I + \delta m\left(\frac{r_I^2}{2}\right) + \delta m\,h_I + \delta m\,K\,\Psi\,\varphi_I$$

stellt aber die Energie der durch den elementaren Kanal strömenden Flüssigkeit am Eintritt und derselbe Ausdruck, nur mit dem Index *II* am Austritt, also der ganze Ausdruck die Energiedifferenz $\delta E_{II} - \delta E_I = \delta E$ dar, d. h. es ist

$$\delta E = (\delta m)\,(w_{q\,II}\,r_{II} - w_{q\,I}\,r_I)\,\omega,$$

der durch die Strömung im elementaren Kanal erhältliche Energieumsatz, der sich durch ein Kraftmoment

$$\frac{\delta E}{\omega} = \delta M = \delta m(w_{q\,II}\,r_{II} - w_{q\,I}\,r_I)$$

an der Achse fühlbar macht; in letzter Form ist der Eulersche Momentensatz zum Ausdruck gebracht.

Da man nun nach dem beschriebenen graphischen Verfahren für jede relative Strombahn den Wert von w_I und w_{II} am Ein- resp. Austritt der Größe und Richtung nach, daher auch $w_{q\,I}$ und

w_{qII}, r_1 und r_2, sowie bei gegebenem λ auch die Geschwindigkeitsverteilung und somit zu jedem δf_q auch das δV resp. δQ bestimmen und daher

$$E = \Sigma \delta E = \Sigma \delta m (w_{qII} r_{II} - w_{qI} r_I) \omega$$

bestimmen kann, so ist hierdurch die gesamte Bestimmung der von einem oder einer Folge solcher Kanäle nach außen erhältlichen mechanischen Energie im Falle der Turbine bei negativem Wert von E oder von außen aufzunehmender Energie im Falle der Pumpe bei positivem Wert von E möglich, es erscheint somit die Hauptaufgabe der Theorie der Kreisräder mit endlichen, d. i. dreidimensionalen Kanälen mit der verwendeten Darstellungsweise lösbar.

Die Untersuchung der Bestandsfähigkeit der Strömung und hiermit der Grenzen der Anwendbarkeit ihrer Form ist ebenfalls durch die in den verschiedenen Beispielen erläuterten Methoden durch Untersuchung des Wertverlaufes von p_z an Rand- und sonstigen Strömungsflächen möglich.

Schlußfolgerung.

In rotierenden Kanälen mit feststehender Drehachse nehmen die Relativ- und die Absolutströmung bestimmte Formen an (Seite 235), liegt die Kanalbewegung innerhalb der Relativformen, so ist die Strömung im Kanal kontinuierlich verteilt, andernfalls tritt diskontinuierliche Strömung ein.

Unter diesen Formen gibt es solche, die widerstandsfreier Strömung entsprechen: in den betreffenden Kanalformen könnte, abgesehen vom Einfluß der Viskosität und der nur periodisch stationären Zuströmung tumbulenzfreie Strömung eintreten: es ist anzunehmen, daß die Umsetzung von mechanischer in hydraulische Energie und umgekehrt in derart geformten Kanälen am günstigsten vor sich geht.

Das Entstehen von diskontinuierlichen Strömungen in Kreiselrädern erscheint durch eine Reihe von Versuchsergebnissen bestätigt.

Bezüglich Verwendung der vorliegenden Darstellungsweise auf zeitlich veränderliche Strömungen können zurzeit nur die leitenden Gedanken mitgeteilt werden.

Es erscheint zweckdienlich, die Erscheinung nach der zeitlichen Veränderlichkeit der in der Geschwindigkeitsformel enthaltenen Größen zu ordnen:

a) Ist in $v = G\sqrt{A}\lambda$ der Geschwindigkeitsfaktor G nicht konstant, sondern veränderlich mit der Zeit, enthalten aber A und λ

die Zeit nicht, so entspricht dies der Bewegung in geschlossenen Kanälen oder Rohren bei veränderlichem Durchfluß; Probleme solcher Strömungen können auf Grundlage der hydraulischen Bewegungsgleichungen behandelt werden, und zwar so lange, als die Strömungsform bei den verschiedenen innerhalb der Folge der Erscheinungen eintretenden Werten von G intakt bleibt.

b) Mit $G =$ konstant, aber unter Anwendung von Formfunktionen, die die Zeit als Variable enthalten, dürften alle Wellenbewegungen, die nicht mit einer Strömung verbunden sind, beschrieben werden können; für diese Fälle bietet die klassische Hydrodynamik eine Reihe schöner Lösungen und wird diesbezüglich auf Lambs Hydrodynamik verwiesen.

c) Für die Probleme der nicht stationären Bewegung in Kanälen und Flüssen werden G und die Formfunktionen zeitlich veränderlich angenommen werden müssen.

IV. Anhang.

Auszug aus dem Artikel des Verfassers in der Schweiz. Bauzeitung, Bd. LII, Nr. 7 und 8.

Zur Geometrie der konformen Abbildungen von Schaufelrissen.

In der Rotationsfläche mit der Meridianlinie mm (Fig. 67) sei p ein Punkt auf dem Parallelkreis mit dem Radius r; derselbe gehöre dem Flächenstück mit den unendlich kleinen Seitenlängen dl,

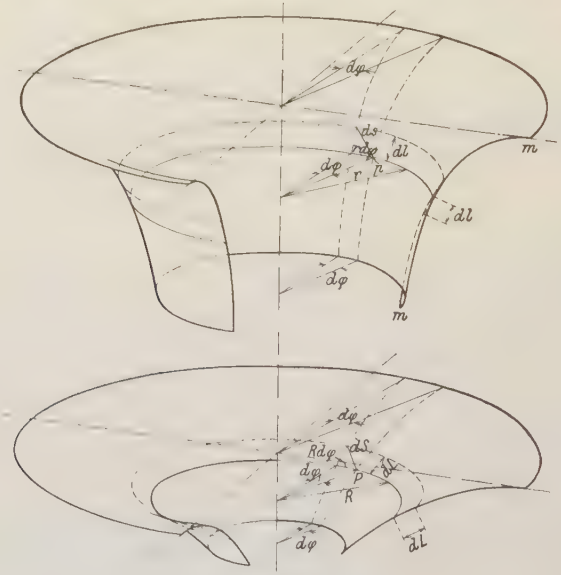

Fig. 67.

gemessen im Meridian, und $r dq$, gemessen im Parallelkreis des Punktes p, an; die Diagonale ds dieses unendlich kleinen Flächenstückes ist bestimmt durch die Gleichung: $ds^2 = dl^2 + r^2 dq^2$.

Dem Punkt p der Rotationsfläche mm entspreche in der koaxialen Rotationsfläche mit der Meridianlinie MM ein Punkt P, dessen Lage derart angenommen wird, daß derselbe mit dem Punkt p in derselben Meridianebene liegt; der Radius seines Parallelkreises sei R, die Seiten des dem obigen entsprechenden unendlich kleinen Flächenstückes seien dL und $Rd\varphi$; hiermit ergibt sich für die Diagonale die Gleichung $dS^2 = dL^2 + R^2 d\varphi^2$.

Das Problem der konformen Abbildung verlangt, daß das Verhältnis $\frac{ds^2}{dS^2} = m^2$ für alle, von den Punkten p und P innerhalb der Flächen, denen dieselben angehören, aus gezogenen Richtungen denselben Wert hat, also unabhängig ist von dem Winkel, unter dem die Diagonale gegen die Meridianlinie oder den Parallelkreis geneigt ist; ist dies nämlich der Fall, so wird jedem, den Punkt p enthaltenden unendlich kleinen Flächenelement mit beliebig geformter Umgrenzungslinie ein ebenfalls unendlich kleines Flächenelement um den Punkt P mit bestimmter Umgrenzung entsprechen, das dem ersten ähnlich ist.

Bildet man nun

$$\frac{ds^2}{dS^2} = m^2 = \frac{dl^2 + r^2 d\varphi^2}{dL^2 + R^2 d\varphi^2} = \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\left(\frac{dl}{r}\right)^2 + d\varphi^2}{\left(\frac{dL}{R}\right)^2 + d\varphi^2},$$

so ist ersichtlich, daß dieser Bedingung für die beiden zugeordneten Punkte genügt wird, wenn $\frac{dl}{r} = \pm \frac{dL}{R}$ gemacht wird, indem dann $\frac{ds^2}{dS^2} = m^2 = \frac{r^2}{R^2}$, also nur mehr von der Größe der zugeordneten Radien abhängig wird; die Abhängigkeit zwischen r und R ist dann durch die Gleichung $\frac{dl}{r} = \pm \frac{dL}{R}$ bestimmt, wenn die Gleichungen der beiden Meridianlinien gegeben und betreffend der Größe der Radien zweier gewisser Parallelkreise der beiden Flächen eine bestimmte Annahme getroffen ist, wie dies aus der Entwicklung der folgenden, mit Rücksicht auf die praktische Anwendung noch weiter spezialisierten Fälle zu ersehen ist.

Da die obige Entwicklung keine Bedingung betreffend eine Abhängigkeit der Form der beiden Meridianlinien mm und MM enthält, so ist es auch zulässig und zudem praktisch bequem, eine der Meridianlinien, z. B. MM als Gerade zu wählen, wodurch die betreffende Rotationsfläche im allgemeinen zu einer Kreiskegelfläche wird; je nach der Größe des Winkels α, unter dem diese Gerade gegen die Achse geneigt ist, erhält man folgende drei Fälle:

1. Fall: $\alpha = 90^0$, die Rotationsfläche MM wird zu einer Ebene EE senkrecht zur Drehachse.
2. Fall: $90^0 > \alpha > 0$, die Rotationsfläche wird eine spezielle Kreiskegelfläche.
3. Fall: $\alpha = 0$, die Gerade hat den konstanten Abstand R_0 von der Achse: die Rotationsfläche wird zu einer Zylinderfläche ZZ.

Die Flächen des zweiten und dritten Falles können in Ebenen ausgebreitet werden, die Bilder der ausgebreiteten Flächen sind naturgemäß den Bildern der Kegel-, bzw. Zylinderfläche in den kleinsten Teilen kongruent, also auch ähnlich: es ergibt sich somit, daß in allen drei Fällen ebene konforme Abbildungen der Rotationsfläche mm entstehen, d. h. jeder beliebigen Figur in der Rotationsfläche mm entsprechen in den drei Abbildungen bestimmte, der ersten konforme Figuren, die dann naturgemäß auch untereinander konform sind.

Mit dieser allgemeinen Eigenschaft sind eine Reihe für die Anwendung wertvolle besondere Eigenschaften verbunden; wie z. B.:

1. Den Parallelkreisen der Rotationsfläche mm entsprechen ebenfalls Parallelkreise auf der Ebene des ersten Falles, am Kegel des zweiten Falles, am Zylinder des dritten Falles; in der ausgebreiteten Kegelfläche des zweiten Falles entsprechen denselben wieder Parallelkreise, in der ausgebreiteten Zylinderfläche des dritten Falles gerade Linien.

Den Meridianlinien der Rotationsfläche mm entsprechen in allen drei Fällen gerade Meridianlinien, die zu den Parallelkreisen der Abbildungen senkrecht stehen.

Es ist hierdurch die Aufzeichnung orthogonaler Netze mit einander zugeordneten Netzlinien ermöglicht.

2. Die Bilder von Kurven, die in der Rotationsfläche mm liegen, schneiden in zugeordneten Punkten die entsprechenden Netzlinien unter denselben Winkeln; die Abbildungen werden winkeltreu.

3. Aus den Längen der Abbildungen von Kurvenstücken lassen sich die wahren Längen derselben in der Rotationsfläche mm bestimmen; dasselbe gilt von Flächenstücken, die von solchen Kurven bzw. deren Abbildungen begrenzt sind.

4. Es können in den Abbildungen Kurven und Kurvenscharen konstruiert werden, denen in der Rotationsfläche mm bestimmte Eigenschaften, z. B. die der Äquidistanz, orthogonalen Schnittes usw., zukommen.

5. Man kann die Kurven der Abbildungen als Bahnen bewegter Punkte betrachten und aus den Geschwindigkeiten in der Abbildung diejenigen in der Rotationsfläche bestimmen. Hierüber geben nun folgende Erörterungen Aufschluß:

I. Bestimmung der Elemente der konformen Netze und Aufzeichnung derselben.

a) Zum ersten Fall: $\alpha = 90^0$.

Das konforme Netz besteht aus radialen Geraden, die durch den Schnittpunkt o des Achsenkreuzes XY gehen und deren gegenseitige Lage der gegenseitigen Neigung der Meridianebenen entspricht und aus Parallelkreisen, deren Halbmesser aus der Relation $\frac{dL}{R} = \pm \frac{dl}{r}$ bestimmt wird. Es wird $L = R$ und mithin ergibt sich

$$\frac{dR}{R} = \pm \frac{dl}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{Ia}$$

$$R = R_0 e^{\pm \int_{r_0}^{r} \frac{dl}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \text{IIa}$$

worin r_0 und R_0 die Radien der zugeordneten Parallelkreise und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnen.

Ist die Meridianlinie mm durch die Gleichung $z = F(r)$ bestimmt, wobei z und r die Koordinaten eines rechtwinkligen ebenen Koordinatensystems in einer Meridianebene bedeuten und die Z-Achse mit der Drehachse zusammenfällt, so wird mit $F'(r) = \frac{dz}{dr}$

$$dl = dr \cdot \sqrt{1 + [F'(r)]^2},$$

also

$$R = R_0 e^{\pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \cdot \sqrt{1 + [F'(r)]^2}}$$

Das Doppelzeichen $\pm$ deutet auf zwei Lösungen hin, die nach der allgemeinen Theorie der konformen Abbildungen als spiegelbildähnlich bezeichnet werden. Die analytische Ausführung der Integration ist, selbst wenn tatsächlich die Funktion F gegeben ist, meist sehr schwierig oder doch wenigstens umständlich; in den praktischen Fällen ist übrigens zumeist nur die Kurve mm selbst gegeben und ist daher zur Ausführung der Integration im allgemeinen eine graphische oder tabellarische Berechnungsmethode zu empfehlen, die sich darauf gründet, daß der Wert jedes bestimmten Integrals einer Quadratur entspricht. Den Figuren 68 und 69 ist eine Berechnungstabelle beigegeben, die nach den Erfahrungen an Übungsbeispielen rasch und mit genügender Genauigkeit zum Ziel führt.

Es wird die Meridianlinie mm (Fig. 68) in eine Anzahl am besten gleicher Teile von der Länge Δl geteilt, so daß, wenn man dieselbe in eine Gerade ausstreckt, auf den Teilpunkten die Längen $\frac{1}{r}$ als

Ordinaten nach einem angenommenen Maßstab aufträgt, eine Kurve und damit eine von der gestreckten Meridianlinie, den Endordinaten $\frac{1}{r_0}$ und $\frac{1}{r}$ und der Kurve gebildete Fläche entsteht, deren einzelne

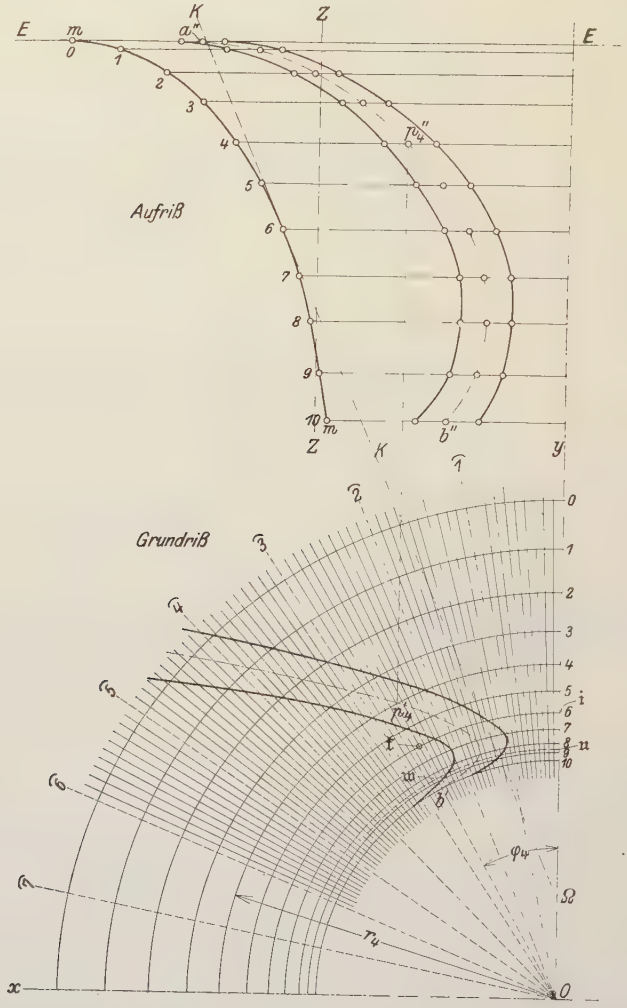

Fig. 68.

Elemente aus Δl und dem mittleren Ordinatenwert zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten bestimmt werden.

In Kolonne IV der Tabelle sind die Mittelwerte von $\frac{1}{r}$, in Kolonne VI die Einzelwerte der Flächenstreifen Δf, in Kolonne VII die

Konforme Abbildung auf der Ebene EE (zu Fig. 69).

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
Pkt.	r	$1/r$	$1/r$ mittel	Δl	Δf	$\int \frac{dl}{r}$	$e^{\int \frac{dl}{r}}$	R/R_0	R	r/R
0	10,00	1,0000				0,0000	1,000	1,000	10,00	1,000
			0,1055		0,1055					
1	9,00	0,1111				0,1055	1,111	0,900	9,00	1,000
			0,1173		0,1173					
2	8,10	0,1235				0,2228	1,250	0,800	8,00	1,013
			0,1298	Konstant = 1,00	0,1298					
3	7,34	0,1362				0,3526	0,423	0,703	7,03	1,045
			0,1427		0,1427					
4	6,70	0,1492				0,4953	0,670	0,609	6,09	1,100
			0,1559		0,1559					
5	6,15	0,1626				0,6512	0,918	0,522	5,22	1,179
			0,1689		0,1689					
6	5,71	0,1752				0,8201	2,270	0,441	4,41	1,295
			0,1807		0,1807					
7	5,37	0,1863				1,0008	0,720	0,368	3,68	1,460
			0,1912		0,1912					
8	5,10	0,1961				1,1920	3,295	0,303	3,03	1,684
			0,1993		0,1993					
9	4,94	0,2025				1,3913	4,020	0,249	2,49	1,984
			0,2065		0,2065					
10	4,75	0,2106				1,5978	4,941	0,202	2,02	2,351

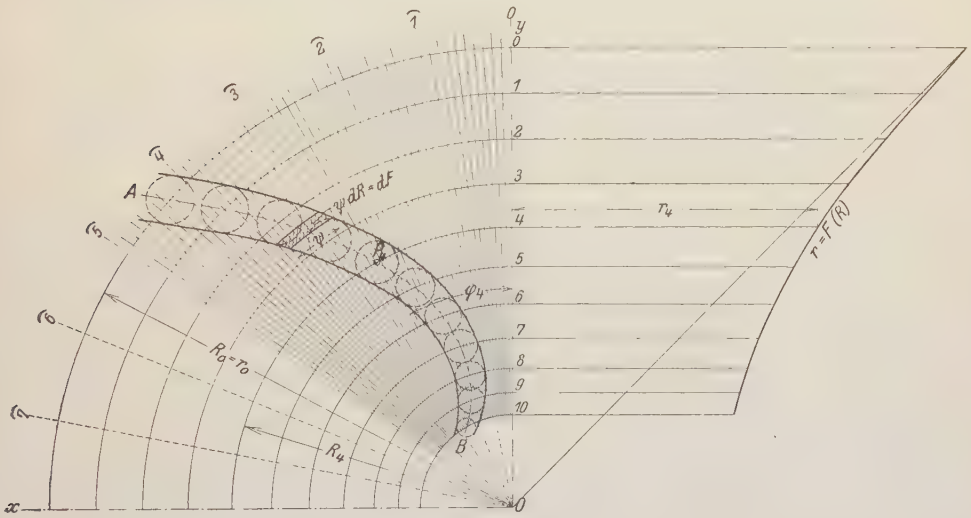

Fig. 69.

Integralwerte $\int_{r_0}^{r} \frac{dl}{r}$ als Summen der Einzelwerte Δf eingetragen.

Die Werte der Kolonne VIII $e^{\int \frac{dl}{r}}$ werden am besten aus den Werten der vorhergehenden Kolonne mit Hilfe der Tafel der natürlichen Logarithmen bestimmt.

Die Kolonne IX gibt $\frac{R}{R_0}$; im Beispiel sind, da der äußerste Punkt der Meridianlinie zum Ausgangspunkt genommen wurde, die entsprechenden Werte aus

$$\frac{R}{R_0} = e^{-\int \frac{dl}{r}} = \frac{1}{e^{+\int \frac{dl}{r}}}$$

berechnet worden; es wird hierbei $\frac{R}{R_0} < 1$; bei Anwendung des $+$Zeichens würde $\frac{R}{R_0} > 1$, die Abbildung wäre dann zur erhaltenen spiegelbildähnlich. Kolonne X gibt die Werte von R bei der Zuordnung $R_0 = r_0$, Kolonne XI gibt für spätern Gebrauch die Werte von $\frac{r}{R}$.

Das aus radialen Geraden und Parallelkreisen bestehende Netz wird für den Gebrauch am besten so angeordnet, daß sein Achsenkreuz XY parallel demjenigen des Grundrisses ist (Fig. 68, 69).

Es ergibt sich hierbei am einfachsten die punktweise Übertragung von Figuren aus der Abbildung in Projektionsdarstellung; um nicht zu viele Parallelkreise zeichnen zu müssen, empfiehlt es sich, auf einem der Schenkel des Achsenkreuzes z. B. OY die Halbmesser $r = F(R)$ durch eine Kurve darzustellen; für die Übertragung größerer Linien und Flächenkomplexe empfiehlt sich die Aufzeichnung gleichmäßig verteilter radialer Netzlinien.

b) Zum zweiten Fall: $90^0 > \alpha > 0$.

Es ist hier zweckmäßig, die entwickelte Kegelfläche zu zeichnen; das Netz besteht wieder aus radialen Linien und Parallelkreisen, die folgendermaßen erhalten werden:

Dem Radius R_0 des Parallelkreises der Kegelfläche ΩK, der einem bestimmten Parallelkreis der Rotationsfläche $m\,m$ zugeordnet wird, entspricht eine Länge der Erzeugenden bis zum Kegelscheitel von $L_0 = \frac{R_0}{\sin \alpha}$; diese Länge gibt den Radius der entwickelten Grundlinie des Kreiskegels; die von Ω aus zu denjenigen Teilpunkten dieses Grundkreises, die dem Schnitt mit den Meridianebenen entsprechen, gezogenen Geraden bilden die radialen Netzlinien; die Halbmesser der Parallelkreise werden wieder aus der Relation $\frac{dL}{R} = \pm \frac{dl}{r}$ berechnet.

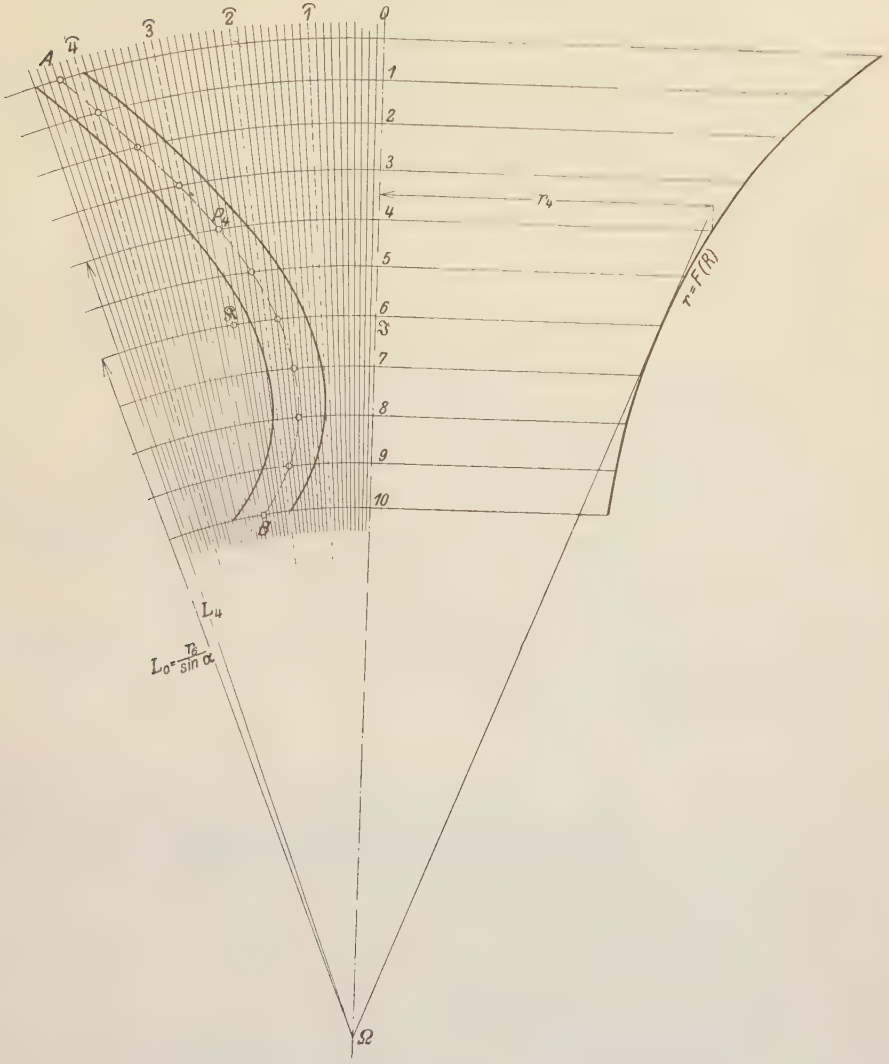

Fig. 70.

Man hat $L = \frac{R}{\sin\alpha}$, also $dL = \frac{dR}{\sin\alpha}$ und mithin:

$$\frac{dR}{R} = \pm \sin\alpha \frac{dl}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}_b$$

$$R = R_0 e^{\pm \sin\alpha \int_{r_0}^{r} \frac{dl}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{II}_b$$

r_0 und R_0 sind wieder die Radien der zugeordneten Parallelkreise von Rotationsfläche $w\,w$ und Kegelfläche ΩK, e die Basis der natürlichen Logarithmen. Nun ist aber auch $L = \frac{R}{\sin\alpha}$; $L_0 = \frac{R_0}{\sin\alpha}$ und mithin folgt für das entwickelte ebene Netz

$$L = L_0\, e^{\pm \sin\alpha \int_{r_0}^{r} \frac{dl}{r}}$$

Bezüglich der Bestimmung des Integrals gilt dasselbe wie im frühern Fall: im Beispiel der Fig. 68 und 70 wurde die Kegelfläche mit Rücksicht auf praktische Anwendungen so gewählt, daß dieselbe die Rotationsfläche $w\,w$ im Parallelkreise 6 berührt und wurde $L_0 = r_6$. $L_0 = \frac{r_6}{\sin\alpha}$ angenommen.

Konforme Abbildung auf der Kegelfläche ΩK zu Fig. 70.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
Pkt.	r	$1/r$	$1/r$ mittel	Δl	Σf	$\int \frac{dl}{r}$	$\sin\alpha \int$	$\sin\alpha \int$	$L' L_0$	L	$L - L_0$	$\frac{r}{\sin\alpha}$	$\frac{L}{L_0}$
0	10,00	0,1000	0,1057	Konstant : 1,00	0,1055	— 0,8200	0,5240	1,3825	1,3825	20,05	— 5,55	7,920	1,263
1	9,09	0,1111	0,1178		0,1178	— 0,7148	0,2828	1,3262	1,3262	19,23	— 4,78	7,598	1,185
2	8,10	0,1235	0,1298		0,1298	— 0,5973	0,2859	1,2862	1,2862	18,56	— 3,86	7,258	1,120
3	7,34	0,1362	0,1427		0,1427	— 0,4675	0,1847	1,2025	1,2025	17,44	— 2,94	6,885	1,066
4	6,70	0,1492	0,1552		0,1552	— 0,3248	0,1288	1,1382	1,1382	16,46	— 1,96	6,505	1,033
5	6,15	0,1626	0,1682		0,1682	— 0,1696	0,0668	1,0720	1,0720	15,50	— 1,00	6,122	1,005
6	5,71	0,1752	0,1807		0,1807	0,0000	0,0000	1,0000	1,0000	14,50	0,00	5,710	1,000
7	5,37	0,1863	0,1912		0,1912	+ 0,1807	0,0714	1,0740	0,9810	13,50	+ 1,00	5,888	1,007
8	5,10	0,1961	0,1998		0,1998	+ 0,3719	0,1468	1,1587	0,9830	12,52	+ 1,98	4,990	1,022
9	4,94	0,2025	0,2065		0,2065	+ 0,5712	0,2257	1,2787	0,7980	11,57	+ 2,93	4,570	1,051
10	4,75	0,2106				+ 0,7777	0,3071	1,3587	0,7360	10,67	+ 3,83	4,230	1,123

In Kolonne VII der bezüglichen Berechnungstabelle ist dementsprechend für den Punkt 6 der Integralwert $\int_{r}^{r_6} \frac{dl}{r} = 0$ angenommen und die Flächen 0 bis 6 positiv, von 6 bis 10 negativ in Rechnung gesetzt worden; aus dem Grund ergeben sich die Werte von $\frac{L}{L_0}$ wie folgt:

$$\frac{L_0}{L} = e^{\sin\alpha \int \frac{dl}{r}}$$

für die Grenzen 0 bis 6 und

$$\frac{L}{L_0} = e^{-\sin\alpha \int \frac{dl}{r}}$$

für die Grenzen 6 bis 10.

Bezüglich der übrigen Kolonnen, sowie der Netzzeichnung kann auf die Fig. 70 nebst Berechnungstabelle verwiesen werden.

c) Zum dritten Fall: $\alpha = 0$.

Die Zylinder-Erzeugende hat den Abstand R_0 von der Drehachse.

Auch hier ist es zweckmäßig, die entwickelte Zylinderfläche zu zeichnen. Das Netz besteht aus zwei Scharen orthogonaler Geraden, von denen diejenigen, die den Meridianlinien der Rotationsfläche entsprechen, in Abständen aufzutragen sind, die den Abschnitten am Kreise vom Radius R_0 entsprechen, die durch die Schnittpunkte der Meridianebenen mit diesem Kreise gebildet sind. Die Abstände der den Parallelkreisen entsprechenden Geraden bestimmen sich wieder aus der Relation $\frac{dL}{R} = \frac{dl}{r}$: es ist hier R konstant gleich R_0 und mithin

$$\frac{dL}{R_0} = \pm \frac{dl}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I}_c$$

$$L = L_0 \pm R_0 \int_{r_0}^{r} \frac{dl}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II}_c$$

Hierbei kann L_0 einen beliebigen Wert, also auch Null annehmen; die Formel vereinfacht sich dann zu

$$L = R_0 \int_{r_0}^{r} \frac{dl}{r}.$$

Die der Fig. 71 beigegebene Berechnungstabelle, sowie die betreffende Figur erklären im Verein mit dem Vorhergehenden die Berechnungs- und Darstellungsweise.

II. Übertragung von Kurven.

Es sei eine in der Rotationsfläche $m\,m$ (Fig. 68) liegende Kurve $a\,b$ in den beiden orthogonalen Projektionen $a'\,b'$ und $a''\,b''$ gegeben: es sind deren konforme Abbildungen zu zeichnen.

Konforme Abbildung auf der Zylinderfläche ZZ (zu Fig. 71).

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Pkt.	r	$1/r$	$1/r$ mittel	Δl	Δf	$\int \frac{dl}{r}$	L/R_0	L	r/R^0
0	10,00	0,1000				0,0000	0,000	0,00	2,00
			0,1055		0,1055				
1	9,00	0,1111				0,1055	0,105	0,52	1,80
			0,1173		0,1173				
2	8,10	0,1235				0,2228	0,223	1,11	1,62
			0,1298		0,1298				
3	7,34	0,1362		Konstant 1,00		0,3526	0,353	1,76	1,47
			0,1427		0,1427				
4	6,70	0,1492				0,4953	0,495	2,47	1,34
			0,1559		0,1559				
5	6,15	0,1626				0,6512	0,651	3,26	1,23
			0,1689		0,1689				
6	5,71	0,1752				0,8201	0,820	4,10	1,14
			0,1807		0,1807				
7	5,37	0,1863				1,0008	1,001	5,00	1,07
			0,1912		0,1912				
8	5,10	0,1961				1,1920	1,192	5,96	1,02
			0,1993		0,1993				
9	4,94	0,2025				1,3913	1,391	6,95	0,99
			0,2065		0,2065				
10	4,75	0,2106				1,5978	1,598	7,99	0,95

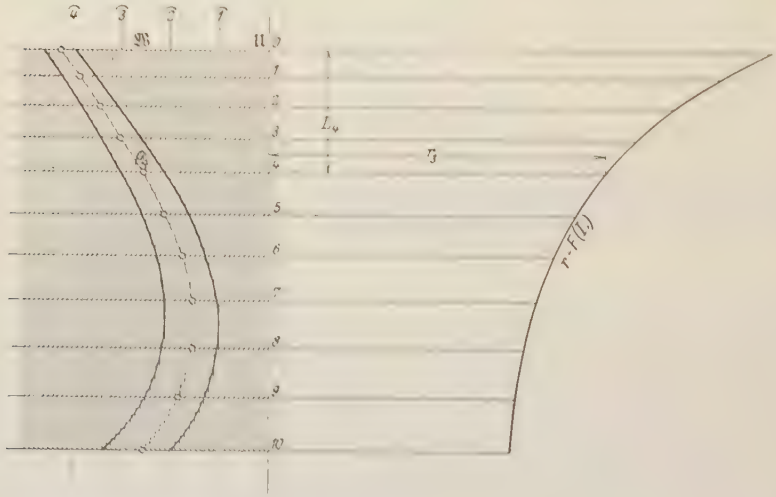

Fig. 71.

a) Im Falle: $\alpha = 90^0$ (Fig. 69).

Um z. B. den dem Punkt p_4 entsprechenden Punkt der konformen Abbildung zu erhalten, zieht man $O P_4 \parallel o p_4$; der Schnittpunkt dieses Strahles mit dem Parallelkreis 4 des konformen Netzes gibt den Punkt P_4 usf.

b) Im Falle: $90^0 > \alpha > 0$ (Fig. 70).

Die Länge des Bogens $\overline{\mathfrak{i}\,\mathfrak{f}}$, den der Strahl $o p_1$ im Grundriß am Kreis mit dem Radius $R_0 = r_6$ abschneidet, wird am Parallelkreis 6 des konformen Netzes vom Anfangsstrahl ΩY aus in $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{F}$ aufgetragen, der Schnitt des Strahles ΩK mit dem Parallelkreis 4 den konformen Netzes gibt den Punkt P_4 usf.

c) Im Falle: $\alpha = 0$ (Fig. 71).

Die Länge des Bogens $\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}$, die der Strahl $o p_1$ im Grundriß am Kreis mit dem Zylinderradius R_0 abschneidet, wird im konformen Netz vom Anfangsstrahl YY aus in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{W}$ abgetragen; der Schnittpunkt der Parallele zu YY durch U mit der Geraden 4 des konformen Netzes gibt den Punkt P_4 usf.

III. Die Bestimmung der wahren Länge eines Kurvenstückes $\overline{ab}$ in der Rotationsfläche aus dessen konformen Abbildungen.

Für den Fall: $\alpha = 90^0$.

Aus der Grundgleichung

$$\frac{ds}{dS} = \frac{r}{R} \quad \text{folgt} \quad s = \int_A^B \frac{r}{R}\, dS.$$

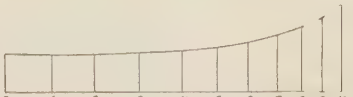

Fig. 72.

Trägt man den zu jedem Punkt der gestreckten Kurve AB gehörigen Wert $\frac{r}{R}$ als Ordinate über dieser Linie auf (Fig. 72), so stellt die so erhaltene Fläche obiges Integral dar; die Flächenbestimmung kann durch Planimetrierung erfolgen.

IV. Die Aufzeichnung von Kurven, die der Kurve ab in der Rotationsfläche äquidistant sind.

Es sei e die sehr kleine Entfernung, um die die gesuchte Kurve von der gegebenen Kurve abstehen soll; dieser Entfernung e entspricht in der konformen Abbildung eine Entfernung E, die durch die Gleichung $E = e\,\frac{R}{r}$ bestimmt ist; diese Gleichung wird

für den Fall a: $E = e\,\frac{R}{r}$

für den Fall b: $E = e\,\frac{L \sin \alpha}{r}$

für den Fall c: $E = e\,\frac{R_0}{r}$.

Die konformen Abbildungen der gesuchten Kurven ergeben sich als die Umhüllenden der Kreise (Fig. 69), die um die einzelnen Punkte der Kurve AB mit den entsprechenden Radien E gezeichnet werden; die Übertragung in die orthogonalen Projektionen der Rotationsfläche erfolgt unter Berücksichtigung des unter III behandelten Verfahrens.

V. Die Bestimmung des wahren Inhaltes eines Flächenstückes aus demjenigen der konformen Abbildung.

Die Aufgabe wird für den Fall a im Anschluß an die frühere Aufgabe behandelt: es ist die wahre Größe des Flächenstreifens ab zu bestimmen.

Es ist im allgemeinen der Inhalt eines in der Rotationsfläche liegenden Flächenelementes gegeben durch $df = r \cdot d\varphi \cdot dl$. Der Inhalt des entsprechenden Flächenelementes in der konformen Abbildung ergibt sich mit $dF = R \cdot d\varphi \cdot dL$, mithin:

$$\frac{df}{dF} = \frac{r\,d\varphi\,dl}{R\,d\varphi \cdot dL} \quad \text{oder mit} \quad \frac{dl}{dL} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{df}{dF} = \frac{r^2}{R^2}, \quad \text{also} \quad f = \int_A^B \frac{r^2}{R^2}\,dF.$$

Bezeichnet man mit η' die im Parallelkreis R der konformen Abbildung gemessene Breite des Flächenstückes, so ist $dF = \eta' dR$ und es folgt

$$f = \int_A^B \left[\frac{r^2}{R^2}\,\eta'\right] dR.$$

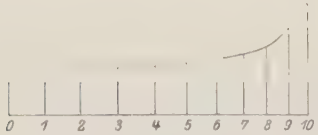

Fig. 73.

Das Integral kann wieder durch Quadratur bestimmt werden, wie aus Fig. 73 ersichtlich ist; da im Beispiel $2e = 1{,}0$ cm als Äquidistanz der beiden neben ab gezeichneten Linien genommen ist, so ergibt sich aus dem nach obigem bestimmten Flächeninhalt von 11,04 qcm des Flächenstreifens ab eine mittlere Länge desselben von 11,04 cm, was mit den früher gefundenen Werten in genügend genauer Übereinstimmung steht.

Auf derselben Grundlage können auch die Formeln für die Flächenbestimmung aus den andern konformen Abbildungen abgeleitet werden; dieselben ergeben sich

für den Fall b mit $f = \int_A^B \left[\frac{r^2}{L^2 \sin \alpha} \psi \right] dL$

für den Fall c mit $f = \int_A^B \left(\frac{r^2}{R_0^2} \psi \right) dL.$

VI. Geschwindigkeits- und Bahnbestimmungen.

Betrachtet man ab und AB als gleichzeitig durchlaufene Bahnkurven, so ergibt sich aus der Grundgleichung $\frac{ds}{dS} = \frac{r}{R}$ unter Einführung der Geschwindigkeiten $v = \frac{ds}{dt}$ und $V = \frac{dS}{dt}$ die Beziehung $v : V = r : R$, die die Bestimmung der einen Geschwindigkeit aus der andern vermittelt.

Es sei nun ein Kanal mit rechteckigem Querschnitt um $\overline{ab}$ als Mittellinie derart geformt, daß zwei der Begrenzungsflächen in Rotationsflächen liegen, deren Meridianlinien in kleinen Abständen von mm verlaufen, während die zwei andern Begrenzungsflächen durch Erzeugende gebildet sind, die längs der beiden früher bestimmten Äquidistanzen angeordnet senkrecht zur Rotationsfläche mm stehen (Fig. 74).

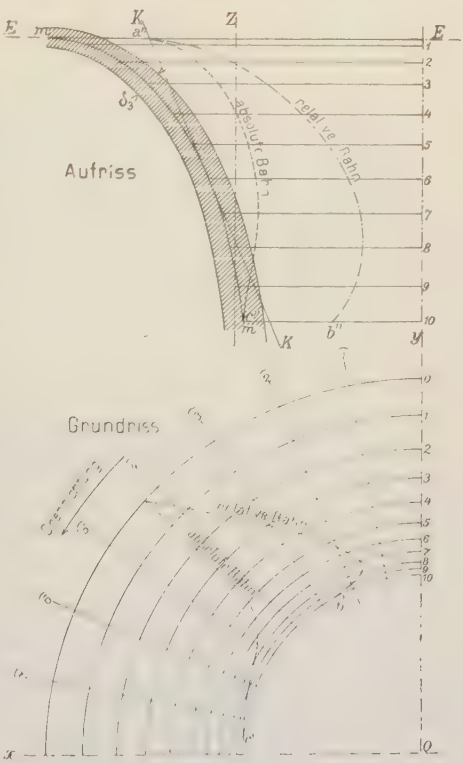

Fig. 74.

Denkt man sich den so bestimmten Kanal von Wasser durchströmt, so erhält man, wenn b die Breite des Kanals, gemessen im Streifen ab, und δ die Tiefe desselben, gemessen zwischen den beiden Begrenzungsrotationsflächen, und q das sekundlich durchströmende Wasserquantum bedeuten, die Werte der mittlern Geschwindigkeiten durch $v = \frac{q}{b\delta}$. Bezeichnet ferner B die Breite des Streifens AB,

so ist, wenn b und B genügend klein sind, zu setzen $b : B = r : R$ und daraus folgt:

$$v = \frac{R}{r} \cdot \frac{q}{B \cdot \delta}; \quad V = \frac{R}{r} \cdot v = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{q}{B\delta};$$

mit der Einführung der Bezeichnungen $\mathfrak{v} = \frac{v}{q}$ und $\mathfrak{V} = \frac{V}{q}$ erhält man

$$\mathfrak{v} = \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{B \cdot \delta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{V} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{B\delta},$$

welche Größen im Beispiel auf Fig. 75 wieder tabellarisch berechnet und eingetragen sind.

Konforme Abbildung auf der Ebene *EE* (zu Fig. 75).

Punkt	S	ΔS	B	δ	$B\delta$	r/R	$\mathfrak{v}$	$\mathfrak{V}$	$1/\mathfrak{V}$	$1/\mathfrak{V}$ mittel	$\frac{\Delta S}{Vm}$	T	U	σ
0	0,00		1,000	0,500	0,500	1,000	2,000	2,000	0,500			0	1,111	0,00
		1,12								0,528	0,591			
1	1,12		1,000	0,556	0,556	1,000	1,798	1,798	0,556			0,591	1,007	0,59
		1,22								0,596	0,727			
2	2,34		0,986	0,629	0,620	1,013	1,592	1,522	0,636			1,318	0,895	1,13
		1,19								0,675	0,803			
3	3,53		0,955	0,695	0,654	1,045	1,463	1,400	0,714			2,121	0,787	1,67
		1,17								0,777	0,909			
4	4,70		0,900	0,759	0,682	1,190	1,320	1,189	0,841			3,030	0,676	2,10
		0,99								0,901	0,892			
5	5,69		0,849	0,814	0,691	1,179	1,227	1,041	0,961			3,922	0,584	2,29
		0,88								1,030	0,906			
6	6,57		0,772	0,863	0,666	1,295	1,177	0,909	1,100			4,828	0,493	2,38
		0,75								1,210	0,908			
7	7,32		0,685	0,904	0,619	1,460	1,106	0,758	1,319			5,736	0,412	2,36
		0,65								1,491	0,969			
8	7,97		0,594	0,940	0,558	1,684	1,065	0,632	1,582			6,705	0,337	2,26
		0,60								1,783	1,070			
9	8,57		0,504	0,973	0,490	1,984	1,029	0,514	1,925			7,785	0,279	2,17
		0,49								2,168	1,062			
10	9,06		0,425	1,000	0,425	2,351	1,000	0,425	1,351			8,847	0,226	2,00

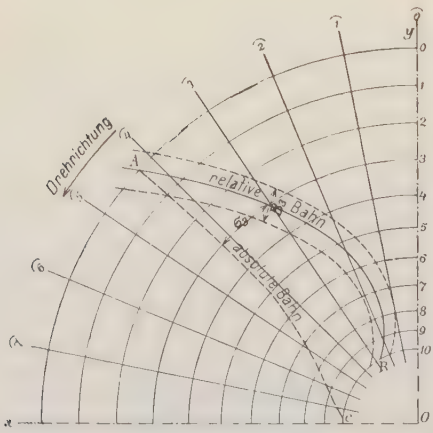

Fig. 75.

Dreht sich der Kanal mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse, so kommt jedem Punkt desselben eine Geschwindigkeit $u = r\omega$ zu; dieser Bewegung des Kanals entsprechen Bewegungen der konformen Abbildungen und zwar:

Im Falle *a* eine Drehbewegung mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω, also mit $U = R\omega$, d. h. es besteht für zwei zugehörige Punkte der Linien $\overline{ab}$ und $\overline{AB}$, die denselben als Kanalpunkte zukommen, die Relation

$$u : U = r : R = v : V = \mathfrak{v} : \mathfrak{V},$$

woraus zu entnehmen ist, daß man in der Abbildung aus der Bahn AB als relativer Bahn bei gegebener Winkelgeschwindigkeit die absolute Bahn bestimmen kann.

Im Falle b (Fig. 76) kommt dem konformen Kanalbild in der Kegelfläche ebenfalls eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu; in der entwickelten Kegelfläche besitzt daher jeder Punkt eine scheinbare Drehbewegung um den Mittelpunkt der Entwicklung, deren Größe bestimmt ist durch

$$U = \frac{L}{L_0} \cdot U_0 = \frac{R}{R_0} U_0 = R \cdot \omega,$$

so daß sich wieder ergibt $u : U = r : R = v : V = \mathfrak{v} : \mathfrak{V}$.

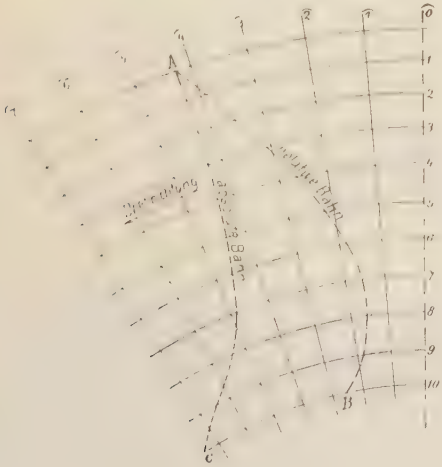

Fig. 76.

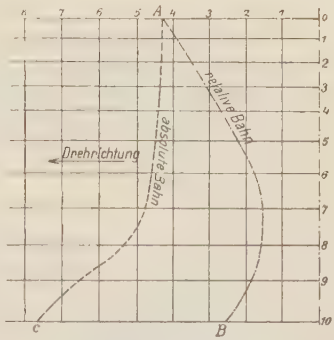

Fig. 77.

Im Falle c (Fig. 77) kommt der Zylinderfläche ebenfalls eine Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu, die für die entwickelte Fläche zu einer Translationsbewegung von der Größe $U = R_0 \omega$ wird; man erhält damit wieder die Relation

$$u : U = r : R_0 = v : V = \mathfrak{v} : \mathfrak{V}.$$

Es kann also in allen Fällen in der Abbildung bei gegebenen Geschwindigkeiten V und U das Bild der Absolutbahn bestimmt und dann dasselbe in Projektionen übertragen werden.

Vergleichende Zusammenstellung der konformen Abbildung eines Strömungsnetzes.

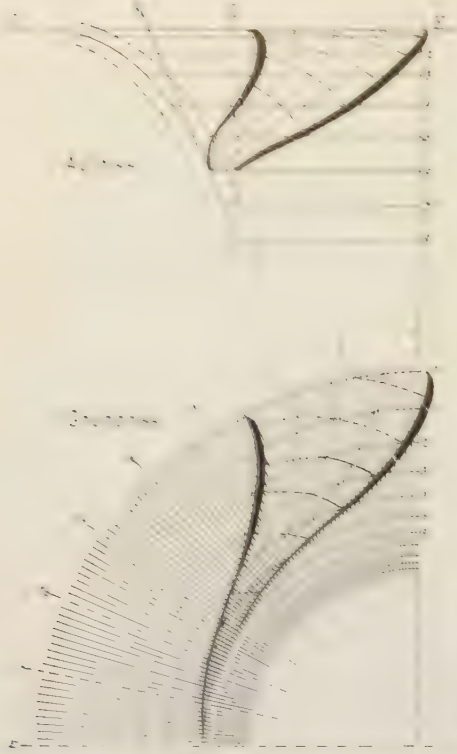

Fig. 78.

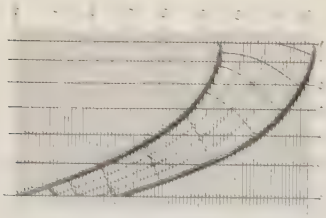

Fig. 81.

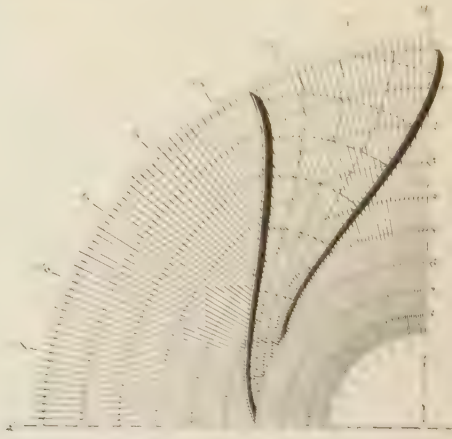

Fig. 79.

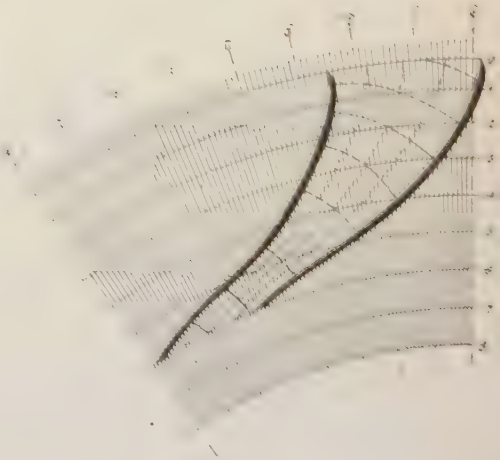

Fig. 80.

Von dem in Fig. 78 im Aufriß und Grundriß dargestellten Strömungsnetz ist:

Fig. 79 die konforme Abbildung in der Ebene $E\,E$.

Fig. 80 die in die Ebene ausgebreitete konforme Abbildung auf der Kegelfläche $K\,K$.

Fig. 81 die in die Ebene ausgebreitete konforme Abbildung auf der Zylinderfläche $Z\,Z$.

Im Beispiel auf Fig. 75 wurde die Berechnungstabelle für die Bestimmung der Absolutbahn in bezug auf den Fall a vollständig durchgeführt. Es wurden statt V und U die proportionalen Größen $\mathfrak{V} = \frac{V}{q}$ und $\mathfrak{U} = \frac{U}{q}$ und mittels der Formeln

$$T = \int_0^n \frac{dS}{\mathfrak{V}} \quad \text{und} \quad \sigma = \mathfrak{U} \cdot T$$

die Bogenabstände σ der Punkte der absoluten Bahn von denen der relativen Bahn berechnet.

Es bedarf weiter keines Beweises, daß aus den Geschwindigkeitsdreiecken in der Abbildung die Werte der absoluten Geschwindigkeiten für die einzelnen Bahnpunkte bestimmt werden können.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

Die Wasserkräfte, ihr Ausbau und ihre wirtschaftliche Ausnutzung. Ein technisch-wirtschaftliches Lehr- und Handbuch. Von Dr.-Ing. **Adolf Ludin,** Großherzogl. Bauinspektor. Mit 1087 Abbildungen im Text und auf 11 Tafeln. Preisgekrönt von der Kgl. Akademie des Bauwesens in Berlin. In zwei Bänden. In Leinwand gebunden Preis M. 60,—.

Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. I. Teil: Rohrleitungen. Von **Lorenzo Allièvi.** Deutsche, erläuterte Ausgabe, bearbeitet von **Robert Dubs** und **V. Bataillard.** II. Teil: Stollen und Wasserschloß. Von **Robert Dubs.** Mit 35 Textfiguren. In einem Bande. Preis M. 10,—.

Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb. Ihre Theorie und Konstruktion. Von **A. Pfarr,** Geh. Baurat, Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der Großherzogl. Technischen Hochschule zu Darmstadt. Zweite, teilweise umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 548 Textfiguren und einem Atlas von 62 lithographierten Tafeln.
In zwei Leinwandbände gebunden Preis M. 40,—.

Die Zentrifugalpumpen mit besonderer Berücksichtigung der Schaufelschnitte. Von Dipl.-Ing. **Fritz Neumann.** Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 221 Textfiguren und 7 lithographierten Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 10,—.

Die Pumpen. Berechnung und Ausführung der für die Förderung von Flüssigkeiten gebräuchlichen Maschinen. Von **Konrad Hartmann** und **J. O. Knoke.** Dritte, neubearbeitete Auflage von **H. Berg,** Professor an der Technischen Hochschule in Stuttgart. Mit 704 Textfiguren und 14 Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 18,—.

Die Theorie der Wasserturbinen. Ein kurzes Lehrbuch von **Rudolf Escher,** Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich. Mit 242 Textfiguren. In Leinwand gebunden Preis M. 8,—.

Wasserkraftmaschinen. Eine Einführung in Wesen, Bau und Berechnung moderner Wasserkraft-Maschinen und -Anlagen. Von Dipl.-Ing. **L. Quantz,** Oberlehrer an der Kgl. höheren Maschinenbauschule zu Stettin. Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage. Mit 159 Textfiguren.
In Leinwand gebunden Preis M. 4,—.

Turbinen und Turbinenanlagen. Von **Viktor Gelpke,** Ingenieur. Mit 52 Textfiguren und 31 lithographierten Tafeln.
In Leinwand gebunden Preis M. 15,—.

Neuere Turbinenanlagen. Auf Veranlassung von Professor E. Reichel, und unter Benutzung seines Berichtes „Der Turbinenbau auf der Weltausstellung in Paris 1900" bearbeitet von **Wilhelm Wagenbach,** Konstruktionsingenieur an der Kgl. Techn. Hochschule in Berlin. Mit 48 Textfiguren und 54 Tafeln. In Leinwand gebunden Preis M. 15,—.

Zur Theorie der Francis-Turbinen. Mit Versuchen an einer 300pferdigen Turbine. Von Dr.-Ing. **Fritz Oesterlen,** Oberingenieur. Mit 31 Textfiguren und 19 lithographierten Tafeln. Preis M. 7,—.

Die automatische Regulierung der Turbinen. Von Dr.-Ing. **W. Bauersfeld,** Assistent an der Kgl. Techn. Hochschule zu Berlin. Mit 126 Textfiguren. Preis M. 6,—.

Technische Thermodynamik. Von Professor Dipl.-Ing. **W. Schüle.** Zweite, erweiterte Auflage der „Technischen Wärmetechnik". Erster Band: Die für den Maschinenbau wichtigsten Lehren nebst technischen Anwendungen. Mit 223 Textfiguren und 7 Tafeln. In Leinwand geb. Preis M. 12,80.

Aufgaben aus der technischen Mechanik. Von Professor **Ferdinand Wittenbauer,** Greiz.

I. Allgemeiner Teil. Zweite, vollständig umgearbeitete Auflage. 773 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 572 Textfiguren.
Preis M. 5,—; in Leinwand gebunden M. 5,80.

II. Teil: Festigkeitslehre. Zweite, verbesserte Auflage. 591 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 490 Textfiguren.
Preis M. 6,—; in Leinwand gebunden M. 6,80.

III. Teil: Flüssigkeiten und Gase. 504 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 339 Textfiguren.
Preis M. 6,—; in Leinwand gebunden M. 6,80.

Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Von Dr.-Ing. Dr. phil. **Heinz Egerer,** Diplom-Ingenieur, vorm. Professor für Ingenieur-Mechanik und Material-Prüfung an der Technischen Hochschule Drontheim. Erster Band. Niedere Algebra und Analysis. — Lineare Gebilde der Ebene und des Raumes in analytischer und vektorieller Behandlung: Kegeltechnik. Mit 320 Textabbildungen und 575 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. In Leinwand geb. Preis M. 12,—.

Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung) für Ingenieure, insbesondere auch zum Selbststudium. Von Dr. **W. Koestler,** Dipl.-Ing., Burgdorf, und Dr. **M. Tramer,** Zürich. Erster Teil: Grundlagen. Mit 221 Textfiguren und 2 Tafeln.
Preis M. 13,—; in Leinwand gebunden M. 14,—.

Technische Schwingungslehre. Einführung in die Untersuchung der für den Ingenieur wichtigsten periodischen Vorgänge aus der Mechanik starrer, elastischer, flüssiger und gasförmiger Körper sowie aus der Elektrizitätslehre. Von Dr. **Wilhelm Hort,** Dipl.-Ing. Mit 87 Textfiguren.
Preis M. 5,60; in Leinwand gebunden M. 6,40.